

N17 Produit scalaire I : projection, coordonnées et orthogonalité

OBJECTIFS

- comprendre le produit scalaire comme un nombre associé à deux vecteurs ;
- calculer un produit scalaire avec une projection ;
- utiliser la formule avec le cosinus ;
- calculer un produit scalaire avec les coordonnées ;
- caractériser l'orthogonalité de deux vecteurs.

ACTIVITÉ DE DÉPART

On tire un chariot avec une force $\vec{F}$, mais le déplacement se fait dans une direction $\vec{d}$.

1. Toute la force aide-t-elle le déplacement ?
2. Que se passe-t-il si la force est perpendiculaire au déplacement ?
3. Quelle quantité pourrait mesurer la part de $\vec{F}$ réellement efficace dans la direction de $\vec{d}$?

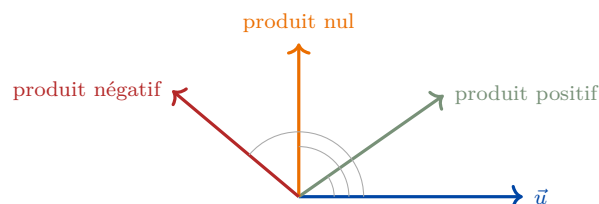
1. Un nombre associé à deux vecteurs

Le produit scalaire mesure une interaction entre deux vecteurs : il tient compte de leurs longueurs et de leur direction relative. Le résultat n'est pas un vecteur : c'est un nombre réel.

Définition (Produit scalaire) Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est un nombre réel noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

Propriété (Signe du produit scalaire) Lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} > 0$ si l'angle entre les deux vecteurs est aigu ;
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ si l'angle est droit ;
- $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$ si l'angle est obtus.



Méthode Avant de calculer, on identifie la nature des objets : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs, tandis que $\vec{u} \cdot \vec{v}$ est un nombre réel. On peut donc comparer $\vec{u} \cdot \vec{v}$ à 0, mais on ne le représente pas par une flèche.

Vigilance. Le symbole $\cdot$ est réservé ici au produit scalaire entre vecteurs. Lorsqu'un signe explicite de multiplication numérique est utile, on écrit plutôt $\times$.

⇒ TD N17 – Partie A : reconnaître la nature des objets et le signe d'un produit scalaire.

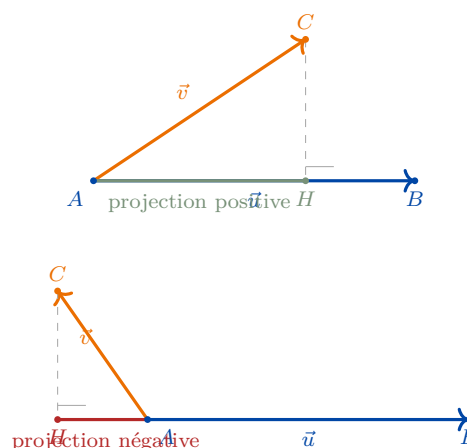
2. Définition par projection

Soient A, B, C trois points avec $A \neq B$. On note H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) . Le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ dépend de la longueur AB et de la projection de $\overrightarrow{AC}$ dans la direction de $\overrightarrow{AB}$.

Définition (Produit scalaire par projection)
Avec les notations précédentes :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times \overline{AH},$$

où $\overline{AH}$ est une longueur algébrique sur la droite (AB) , positive si H est du même côté que B par rapport à A , négative sinon.



Méthode Pour calculer un produit scalaire par projection, on choisit une direction, on projette le second vecteur sur cette direction, puis on multiplie la longueur du premier vecteur par la longueur algébrique projetée.

Exemple Si $AB = 6$ et si le projeté H de C sur (AB) vérifie $\overline{AH} = 4$, alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 6 \times 4 = 24$. Si au contraire $\overline{AH} = -2$, alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 6 \times (-2) = -12$.

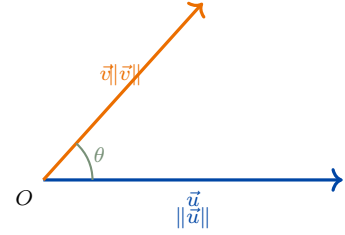
Vigilance. La projection peut être positive, nulle ou négative. Il ne faut donc pas remplacer automatiquement $\overline{AH}$ par une longueur positive.

⇒ TD N17 – Partie A : calculer par projection et interpréter le signe.

3. Formule avec le cosinus

Propriété (Formule avec l'angle) Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls, et soit θ une mesure de l'angle entre ces deux vecteurs, avec $0 \leq \theta \leq \pi$. Alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos \theta.$$



Méthode Cette formule est utile lorsque l'on connaît les longueurs des deux vecteurs et l'angle qu'ils forment. Le signe du produit scalaire vient alors du signe de $\cos \theta$.

Exemple Si $\|\vec{u}\| = 5$, $\|\vec{v}\| = 4$ et si l'angle entre les deux vecteurs vaut 60° , alors

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 5 \times 4 \times \cos 60^\circ = 20 \times \frac{1}{2} = 10.$$

Propriété (Norme induite) Pour tout vecteur $\vec{u}$, on a $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$. Ainsi, dans le plan euclidien, $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$.

Vigilance. La formule avec le cosinus concerne l'angle entre deux vecteurs, pas nécessairement l'angle orienté du cercle trigonométrique. Ici, l'angle est compris entre 0 et π .

⇒ TD N17 – Partie B : calculer avec longueurs et angles.

4. Expression avec les coordonnées

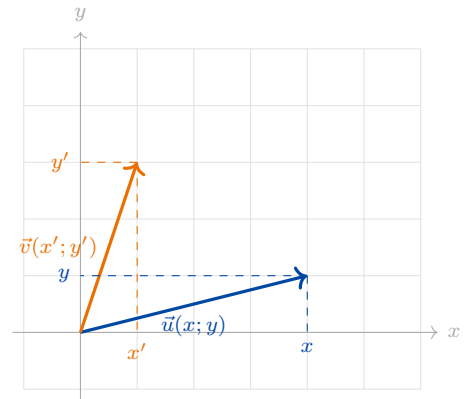
Propriété (Produit scalaire en repère orthonormé) Dans un repère orthonormé, si $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, alors

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'.$$

Méthode Pour calculer un produit scalaire avec les coordonnées, on multiplie les abscisses entre elles, les ordonnées entre elles, puis on additionne les deux résultats.

Exemple Si $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$, alors

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \times 5 + (-2) \times 4 = 15 - 8 = 7.$$



Propriété (Symétrie et bilinéarité) Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et tout réel k , on a :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}, \quad k\vec{u} \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v}), \quad \vec{u} + \vec{w} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{w} \cdot \vec{v}.$$

Ces propriétés expriment la symétrie et la linéarité par rapport à chaque vecteur.

Vigilance. La formule $xx' + yy'$ n'est valable que dans un repère orthonormé. Dans un repère quelconque, on ne peut pas l'utiliser directement.

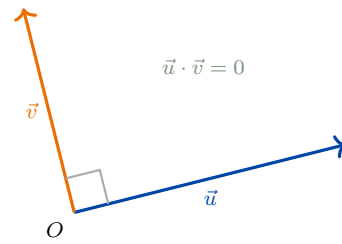
⇒ TD N17 – Partie B : calculs en coordonnées et choix de méthode.

5. Orthogonalité

Théorème (Caractérisation de l'orthogonalité)

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0.$$



Méthode Pour démontrer que deux vecteurs sont orthogonaux, on peut calculer leur produit scalaire. S'il vaut 0, alors les deux vecteurs sont orthogonaux. Pour montrer que deux droites sont perpendiculaires, on peut montrer que leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux.

Exemple Soient $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}$. On calcule

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times 6 + 3 \times (-4) = 12 - 12 = 0.$$

Donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

Propriété (Vecteurs directeurs et perpendicularité) Deux droites de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont perpendiculaires si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Vigilance. Dire que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ signifie que les vecteurs sont orthogonaux. Cela ne signifie pas que l'un des deux vecteurs est nécessairement le vecteur nul.

⇒ TD N17 – Partie C : orthogonalité de vecteurs et perpendicularité de droites.

6. Choisir une méthode de calcul

Méthode Pour calculer un produit scalaire, on choisit la méthode adaptée aux données :

- si une projection est visible ou donnée, utiliser $AB \times \overline{AH}$;
- si les longueurs et l'angle sont connus, utiliser $\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos \theta$;
- si les coordonnées sont connues dans un repère orthonormé, utiliser $xx' + yy'$;
- si l'objectif est l'orthogonalité, chercher à montrer que le produit scalaire vaut 0.

Exemple On considère les points $A(1;2)$, $B(5;3)$ et $C(3;-4)$ dans un repère orthonormé. On a $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix}$. Alors

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4 \times 2 + 1 \times (-6) = 2.$$

Les vecteurs ne sont donc pas orthogonaux.

Vigilance. Un produit scalaire nul prouve une orthogonalité. Un produit scalaire positif ou négatif donne une information sur l'angle, mais ne donne pas directement une longueur.

⇒ TD N17 – Partie D : choisir une méthode et résoudre des problèmes géométriques.

7. Synthèse

A RETENIR

- Le produit scalaire de deux vecteurs est un nombre réel.
- Par projection, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times \overline{AH}$, où H est le projeté orthogonal de C sur (AB) .
- Avec un angle θ , $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos \theta$.
- Dans un repère orthonormé, si $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$.
- Pour tout vecteur $\vec{u}$, $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$.
- Deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul.
- Le choix de la méthode dépend des données : projection, angle, coordonnées ou objectif d'orthogonalité.

APPLICATIONS IMMÉDIATES

1. Si $AB = 5$ et $\overline{AH} = 3$, calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
2. Si $\|\vec{u}\| = 6$, $\|\vec{v}\| = 2$ et l'angle vaut 60° , calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$.
3. Calculer le produit scalaire de $\vec{u} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.
4. Dire si les vecteurs $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ sont orthogonaux.
5. Dans un repère orthonormé, calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ pour $A(0; 1)$, $B(3; 2)$, $C(1; 5)$.
6. Expliquer pourquoi le résultat d'un produit scalaire n'est pas un vecteur.

BESOIN D'UNE REPRISE ?

À retravailler en priorité :

- distinguer vecteur, point et nombre réel ;
- lire une projection orthogonale ;
- utiliser une longueur algébrique ;
- calculer avec le cosinus ;
- calculer $xx' + yy'$ en repère orthonormé ;
- utiliser $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ pour prouver une orthogonalité.

⇒ **TD N17 – Toutes les parties : projection, angle, coordonnées et orthogonalité.**