

OBJECTIFS

- comprendre l'enroulement de la droite numérique sur le cercle ;
- donner du sens au radian ;
- définir $\cos x$ et $\sin x$ comme coordonnées ;
- connaître les propriétés fondamentales ;
- utiliser les valeurs remarquables et les signes.

ACTIVITÉ DE DÉPART

On enroule une ficelle graduée autour d'un cercle de rayon 1, en partant du point $I(1;0)$.

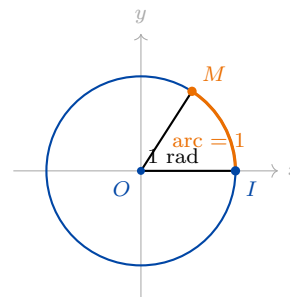
1. Quelle longueur faut-il parcourir pour faire un tour complet ?
2. Où arrive-t-on après une longueur π ? après $\frac{\pi}{2}$?
3. Pourquoi deux réels différents peuvent-ils désigner le même point du cercle ?

1. Cercle trigonométrique et radian

Définition (Cercle trigonométrique) Dans un repère orthonormé $(O; I, J)$, le cercle trigonométrique est le cercle de centre O , de rayon 1, orienté dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

Définition (Radian) Sur un cercle de rayon 1, une mesure d'angle en radians correspond à la longueur de l'arc intercepté par cet angle. Un angle de 1 radian intercepte donc un arc de longueur 1.

Propriété (Tour complet) Le périmètre du cercle trigonométrique est 2π . Ainsi, un tour complet correspond à 2π radians, donc $360^\circ = 2\pi \text{ rad}$.



Méthode Pour convertir des degrés en radians, on utilise la proportionnalité : $180^\circ = \pi \text{ rad}$. Ainsi, une mesure de a° vaut $\frac{a\pi}{180}$ radians.

Exemple On a $90^\circ = \frac{\pi}{2}$, $60^\circ = \frac{\pi}{3}$, $45^\circ = \frac{\pi}{4}$, $30^\circ = \frac{\pi}{6}$. Réciproquement, $\frac{2\pi}{3} \text{ rad}$ correspond à 120° .

Vigilance. Le radian est une mesure d'angle construite à partir d'une longueur d'arc. Il faut vérifier le mode de la calculatrice : degré ou radian.

⇒ TD N16 – Partie A : conversions degrés-radians et repérage sur le cercle.

2. Enroulement de la droite numérique

On associe à chaque réel x un point M_x du cercle trigonométrique en enroulant la droite numérique autour du cercle, à partir du point I .

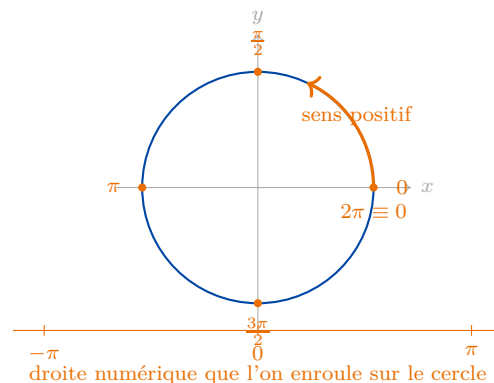
Propriété (Périodicité géométrique) Deux réels qui diffèrent d'un multiple de 2π correspondent au même point du cercle. Pour tout entier relatif k , les réels x et $x + 2k\pi$ ont donc la même image sur le cercle.

Exemple Les réels $0, 2\pi, -2\pi$ et 4π correspondent tous au point $I(1;0)$. Les réels $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{5\pi}{2}$ correspondent tous les deux au point $J(0;1)$.

Méthode Pour placer un réel sur le cercle, on peut lui ajouter ou lui retrancher des multiples de 2π afin de le ramener dans un intervalle plus lisible, par exemple $[0; 2\pi[$ ou $] - \pi; \pi]$.

Exemple Pour placer $\frac{13\pi}{6}$, on écrit $\frac{13\pi}{6} = 2\pi + \frac{\pi}{6}$. Le point associé est donc le même que celui associé à $\frac{\pi}{6}$.

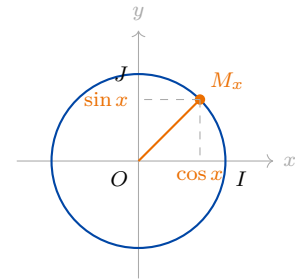
Vigilance. Le réel x n'est pas un point : il repère un point du cercle après enroulement. Plusieurs réels peuvent repérer le même point.



3. Sinus et cosinus comme coordonnées

Définition (Cosinus et sinus) Pour tout réel x , on note M_x le point du cercle trigonométrique associé à x . Le cosinus et le sinus de x sont les coordonnées de ce point :

$$M_x(\cos x; \sin x).$$



Exemple Le réel 0 correspond au point $I(1;0)$, donc $\cos 0 = 1$ et $\sin 0 = 0$. Le réel $\frac{\pi}{2}$ correspond au point $J(0;1)$, donc $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ et $\sin \frac{\pi}{2} = 1$.

Propriété (Identité fondamentale) Pour tout réel x , on a

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

De plus, $-1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$.

Exemple Si $\cos x = \frac{3}{5}$ et si x correspond à un point situé au-dessus de l'axe des abscisses, alors $\sin x > 0$. On obtient $\sin^2 x = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$, donc $\sin x = \frac{4}{5}$.

Vigilance. Le signe de $\sin x$ ou de $\cos x$ dépend du quadrant dans lequel se trouve le point M_x .

4. Signes, périodicité et symétries

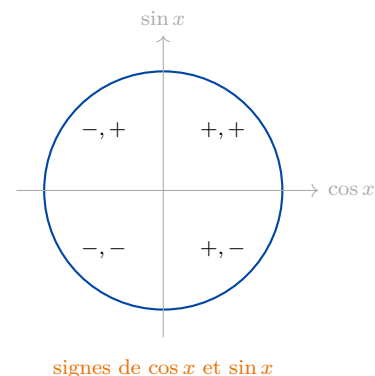
Propriété (Périodicité) Pour tout réel x , on a :

$$\cos(x + 2\pi) = \cos x \quad \text{et} \quad \sin(x + 2\pi) = \sin x.$$

Propriété (Parité) Pour tout réel x , on a :

$$\cos(-x) = \cos x \quad \text{et} \quad \sin(-x) = -\sin x.$$

La fonction cosinus est paire, tandis que la fonction sinus est impaire.



Propriété (Angles associés utiles) Pour tout réel x , on a :

$$\begin{aligned} \cos(\pi - x) &= -\cos x, & \sin(\pi - x) &= \sin x, \\ \cos(\pi + x) &= -\cos x, & \sin(\pi + x) &= -\sin x. \end{aligned}$$

Méthode Pour déterminer le signe ou la valeur de $\sin x$ ou $\cos x$, on ramène d'abord l'angle à une position connue sur le cercle, puis on utilise le quadrant et les symétries.

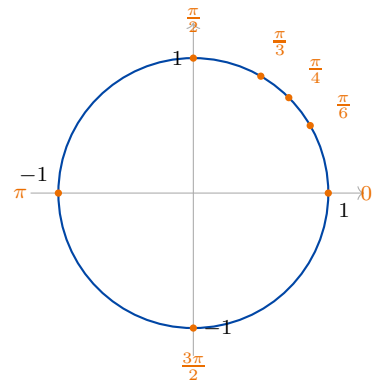
Exemple On veut déterminer $\cos \frac{5\pi}{6}$. On écrit $\frac{5\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6}$. Donc $\cos \frac{5\pi}{6} = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Vigilance. Les formules de symétrie ne se devinent pas en changeant seulement un signe au hasard. Il faut toujours penser au point sur le cercle : droite/gauche pour le cosinus, haut/bas pour le sinus.

5. Valeurs remarquables

Propriété (Valeurs remarquables du premier quadrant)

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1



Méthode Pour retrouver le tableau, on peut retenir que sur $[0; \frac{\pi}{2}]$, les valeurs de $\cos x$ descendent de 1 à 0, tandis que celles de $\sin x$ montent de 0 à 1.

Exemple On veut déterminer $\sin \frac{2\pi}{3}$. Comme $\frac{2\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3}$, on a $\sin \frac{2\pi}{3} = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

On veut déterminer $\cos(-\frac{\pi}{4})$. Comme le cosinus est pair, $\cos(-\frac{\pi}{4}) = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Vigilance. Les valeurs remarquables ne concernent pas seulement les angles du premier quadrant : les symétries permettent d'en déduire les valeurs dans tout le cercle.

⇒ TD N16 – Partie C : valeurs remarquables et réduction d'angles.

6. Lire et exploiter le cercle trigonométrique

Méthode Pour exploiter le cercle trigonométrique :

1. placer ou ramener le réel x sur le cercle ;
2. repérer le quadrant ;
3. lire le signe de $\cos x$ et de $\sin x$;
4. si l'angle est remarquable, utiliser le tableau ;
5. si besoin, utiliser une symétrie ou la périodicité.

Exemple Déterminons $\sin \frac{7\pi}{6}$ et $\cos \frac{7\pi}{6}$. On écrit $\frac{7\pi}{6} = \pi + \frac{\pi}{6}$. Le point est dans le troisième quadrant, donc les deux coordonnées sont négatives. Ainsi

$$\cos \frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad \sin \frac{7\pi}{6} = -\frac{1}{2}.$$

Propriété (Équations simples sur le cercle) Résoudre une équation comme $\cos x = a$ ou $\sin x = a$, c'est chercher les points du cercle ayant une abscisse ou une ordonnée donnée. Sur un intervalle donné, on lit ensuite les réels associés à ces points.

Exemple Sur $[0; 2\pi[$, l'équation $\cos x = \frac{1}{2}$ a deux solutions : $x = \frac{\pi}{3}$ et $x = \frac{5\pi}{3}$.

Vigilance. La solution d'une équation trigonométrique dépend de l'intervalle demandé. Sur $[0; 2\pi[$, on ne donne pas la même forme de réponse que sur $\mathbb{R}$.

⇒ TD N16 – Partie D : lectures sur le cercle et équations trigonométriques simples.

7. Synthèse

A RETENIR

- Le cercle trigonométrique est le cercle de centre O , de rayon 1, orienté dans le sens positif.
- Un tour complet correspond à 2π radians.
- En enroulant la droite numérique, chaque réel x correspond à un point M_x du cercle.
- Les coordonnées de M_x sont $(\cos x; \sin x)$.
- Pour tout réel x , $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.
- Les fonctions sinus et cosinus sont 2π -périodiques.
- Le cosinus est pair : $\cos(-x) = \cos x$. Le sinus est impair : $\sin(-x) = -\sin x$.
- Les valeurs remarquables se déduisent du premier quadrant et des symétries.

APPLICATIONS IMMÉDIATES

1. Convertir 120° , 225° et -90° en radians.
2. Placer $\frac{7\pi}{6}$, $-\frac{\pi}{3}$ et $\frac{11\pi}{4}$ sur le cercle.
3. Donner $\cos \frac{2\pi}{3}$, $\sin \frac{2\pi}{3}$, $\cos(-\frac{\pi}{6})$.
4. Déterminer le signe de $\cos \frac{5\pi}{4}$ et de $\sin \frac{11\pi}{6}$.
5. Résoudre sur $[0; 2\pi[$: $\sin x = \frac{1}{2}$.
6. Expliquer pourquoi $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

BESOIN D'UNE REPRISE ?

- À retravailler en priorité :
- conversion degrés-radians ;
 - placement sur le cercle ;
 - lecture des coordonnées ;
 - signes selon les quadrants ;
 - valeurs remarquables ;
 - utilisation des symétries ;
 - réduction modulo 2π .

⇒ **TD N16 – Toutes les parties : cercle, radian, sinus, cosinus et valeurs remarquables.**