

OBJECTIFS

- Passer d'une contrainte géométrique à une équation.
- Utiliser un vecteur directeur pour écrire une équation de droite.
- Reconnaître une équation cartésienne de droite.
- Lire un vecteur directeur ou un vecteur normal dans une équation.
- Choisir une méthode adaptée selon les données disponibles.

ACTIVITE DE DEPART

Dans un repère, on donne $A(1;2)$ et le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. On cherche une équation de la droite d passant par A et dirigée par $\vec{u}$.

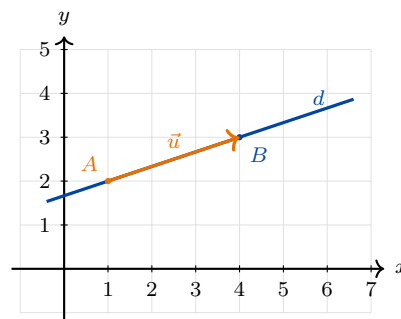
1. Placer A , puis construire un second point de d .
2. Pour un point $M(x; y)$, traduire que $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.
3. En déduire une relation entre x et y .

1. Vecteur directeur et équation de droite

Une droite peut être décrite par une figure, par deux points, par un vecteur directeur ou par une équation. L'enjeu est de passer d'un registre à l'autre.

Définition (Vecteur directeur) Un vecteur non nul $\vec{u}$ est un vecteur directeur d'une droite d lorsqu'il a la même direction que d . Si A et B sont deux points distincts de d , alors $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de d .

Propriété (Appartenance à une droite dirigée) Soit d la droite passant par $A(x_A; y_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$, avec $(p; q) \neq (0; 0)$. Un point $M(x; y)$ appartient à d lorsque $\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires, c'est-à-dire lorsque $p(y - y_A) - q(x - x_A) = 0$.



Méthode Pour écrire une équation de la droite passant par $A(x_A; y_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$, on introduit un point $M(x; y)$, puis on écrit la colinéarité de $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$: $p(y - y_A) - q(x - x_A) = 0$. On développe ensuite pour obtenir une équation de la forme $ax + by + c = 0$.

Exemple La droite passant par $A(1; 2)$ et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ vérifie $3(y - 2) - 1(x - 1) = 0$. On obtient $3y - 6 - x + 1 = 0$, donc $-x + 3y - 5 = 0$. Le point $B(4; 3)$ appartient bien à cette droite car $-4 + 9 - 5 = 0$.

Vigilance. La relation $p(y - y_A) - q(x - x_A) = 0$ vient d'une colinéarité. Pour $\vec{u} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$, on utilise bien $p(y - y_A) - q(x - x_A)$.

⇒ TD N15 — Partie A : passer d'un vecteur directeur à une équation.

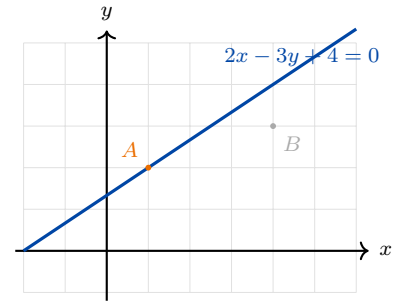
2. Équation cartésienne d'une droite

Définition (Équation cartésienne) Une équation cartésienne de droite est une équation de la forme $ax + by + c = 0$, où a , b et c sont des réels avec $(a; b) \neq (0; 0)$. Un point $M(x; y)$ appartient à la droite lorsque ses coordonnées vérifient cette équation.

Propriété (Droite associée à une équation cartésienne) Dans un repère du plan, toute équation $ax + by + c = 0$, avec $(a; b) \neq (0; 0)$, définit une droite. Réciproquement, toute droite admet une équation cartésienne de cette forme.

Méthode Pour vérifier si un point appartient à une droite donnée par une équation cartésienne, on remplace x et y par les coordonnées du point. Si l'égalité est vraie, le point appartient à la droite ; sinon, il n'appartient pas à la droite.

Exemple On considère $d : 2x - 3y + 4 = 0$. Pour $A(1; 2)$, on calcule $2 \times 1 - 3 \times 2 + 4 = 0$, donc $A \in d$. Pour $B(4; 3)$, on calcule $2 \times 4 - 3 \times 3 + 4 = 3$, donc $B \notin d$.



Propriété (Lire un vecteur directeur) Si d a pour équation $ax + by + c = 0$, alors un vecteur directeur de d est $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$. Le vecteur $\begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$ convient aussi.

Exemple Pour la droite $d : 2x - 3y + 4 = 0$, on a $a = 2$ et $b = -3$. Un vecteur directeur est donc $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Sur la figure, lorsque x augmente de 3, y augmente de 2.

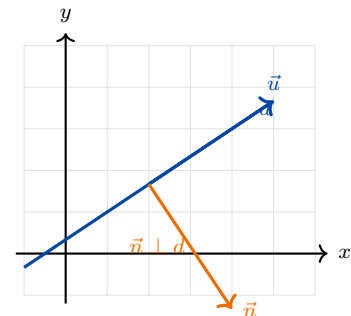
Vigilance. Une même droite admet une infinité d'équations cartésiennes : $2x - 3y + 4 = 0$ et $-4x + 6y - 8 = 0$ définissent la même droite, car la seconde équation est obtenue en multipliant la première par -2 .

⇒ TD N15 — Partie B : lire, vérifier et transformer une équation cartésienne.

3. Vecteur normal sans produit scalaire

Définition (Vecteur normal) Dans un repère orthonormé, un vecteur non nul $\vec{n}$ est un vecteur normal à une droite d lorsqu'il est perpendiculaire à d . Il est donc perpendiculaire à tout vecteur directeur de d .

Propriété (Lire un vecteur normal) Si une droite d a pour équation $ax + by + c = 0$, alors $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à d . En effet, un vecteur directeur de d est $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$, qui est obtenu en tournant $\vec{n}$ d'un quart de tour.



Méthode Pour déterminer une équation de droite, on choisit selon les données. Avec un point $A(x_A; y_A)$ et un vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$, on écrit $p(y - y_A) - q(x - x_A) = 0$. Avec un point $A(x_A; y_A)$ et un vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, on prend comme vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$, puis la colinéarité de $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ donne $a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0$.

Exemple La droite passant par $A(2; -1)$ et de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ admet comme vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$. Avec un point $M(x; y)$, la colinéarité de $\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x-2 \\ y+1 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}$ s'écrit $(-4)(y + 1) - 3(x - 2) = 0$, soit $-4y - 4 - 3x + 6 = 0$, donc $3x + 4y - 2 = 0$.

Vigilance. Le vocabulaire doit être précis : un vecteur directeur donne la direction de la droite ; un vecteur normal donne une direction perpendiculaire à la droite. Dans $ax + by + c = 0$, $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est normal et $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est directeur.

⇒ TD N15 — Partie C : choisir entre vecteur directeur et vecteur normal.

4. Droites parallèles et configurations simples

Propriété (Parallélisme) Deux droites sont parallèles lorsqu'elles ont des vecteurs directeurs colinéaires. Si $d : ax + by + c = 0$ et $d' : a'x + b'y + c' = 0$, alors d et d' sont parallèles lorsque les vecteurs normaux $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$ sont colinéaires, c'est-à-dire lorsque $ab' - a'b = 0$.

Méthode Pour étudier une configuration avec des droites, on peut suivre trois étapes : identifier les données utiles, choisir une représentation adaptée, puis conclure géométriquement. Si deux points sont donnés, on forme un vecteur directeur. Si une équation est donnée, on lit un vecteur directeur ou normal. Si un point doit appartenir à une droite, on vérifie l'équation.

Exemple On considère $d : 2x - 3y + 1 = 0$ et $d' : 4x - 6y - 5 = 0$. Les vecteurs normaux $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{n}' \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix}$ sont colinéaires car $\vec{n}' = 2\vec{n}$. Les droites d et d' sont donc parallèles. Elles ne sont pas confondues, car l'équation $2x - 3y + 1 = 0$ multipliée par 2 donnerait $4x - 6y + 2 = 0$, et non $4x - 6y - 5 = 0$.

Vigilance. Pour montrer que deux droites sont confondues, il ne suffit pas que leurs vecteurs directeurs soient colinéaires : il faut aussi qu'elles aient un point commun, ou que leurs équations soient entièrement proportionnelles.

⇒ **TD N15 — Partie D : configurations, parallélisme et choix de méthode.**

A RETENIR

- Un vecteur directeur donne la direction d'une droite.
- La droite passant par $A(x_A; y_A)$ et de vecteur directeur $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ vérifie $p(y - y_A) - q(x - x_A) = 0$.
- Une équation cartésienne de droite est de la forme $ax + by + c = 0$, avec $(a; b) \neq (0; 0)$.
- Pour $ax + by + c = 0$, un vecteur normal est $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et un vecteur directeur est $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.
- Deux droites sont parallèles lorsque leurs vecteurs directeurs, ou leurs vecteurs normaux, sont colinéaires.

APPLICATIONS IMMÉDIATES

1. Déterminer une équation de la droite passant par $A(2; 1)$ et de vecteur directeur $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$.
2. Vérifier si $B(3; -2)$ appartient à la droite $5x + 2y - 11 = 0$.
3. Donner un vecteur directeur et un vecteur normal de $d : -3x + 7y + 1 = 0$.
4. Déterminer une équation de la droite passant par $C(1; -4)$ et de vecteur normal $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$.
5. Dire si les droites $2x - y + 3 = 0$ et $-4x + 2y + 1 = 0$ sont parallèles.
6. Proposer une stratégie pour montrer que trois points sont alignés en utilisant une équation de droite.

⇒ **Entraîne-toi avec le TD N15 pour automatiser le passage figure, vecteurs, équations et configura**