

OBJECTIFS

- Calculer une somme de termes consécutifs.
- Utiliser les formules de somme arithmétique et géométrique.
- Distinguer terme u_n et somme cumulée.
- Résoudre un problème de seuil.
- Modéliser une situation avec pourcentages et suites.
- Interpréter un résultat dans un contexte discret.

ACTIVITÉ DE DÉPART

Un élève économise 20 euros le premier mois, puis augmente son versement de 5 euros chaque mois.

20, 25, 30, 35, ...

1. Combien verse-t-il le 6^e mois ?
2. Combien a-t-il versé au total après 6 mois ?
3. Faut-il calculer seulement un terme ou une somme ?

On veut distinguer une valeur à un rang donné et un cumul de valeurs.

1. Somme de termes consécutifs

Définition (Somme cumulée) Une somme cumulée additionne plusieurs termes consécutifs d'une suite. Par exemple :

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n.$$

Elle représente souvent un total : argent versé, distance totale, production cumulée, population cumulée.

Définition (Notation sigma) La notation

$$\sum_{k=0}^n u_k$$

se lit « somme des u_k , pour k allant de 0 à n ». Elle signifie :

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n.$$

Méthode Avant de calculer, identifier si la question porte sur un terme isolé ou sur un cumul. Un terme isolé se note u_n . Un cumul s'écrit avec une somme.

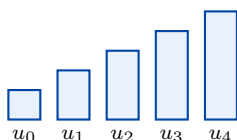
Exemple Si $u_n = 3n + 2$, alors :

$$u_4 = 3 \times 4 + 2 = 14.$$

Mais la somme des cinq premiers termes est :

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 2 + 5 + 8 + 11 + 14 = 40.$$

somme = aire totale des barres



Vigilance. Ne pas confondre u_n et $u_0 + \cdots + u_n$. Le premier est une valeur ; le second est un total.

⇒ TD N13 – Partie A : termes, cumuls et notation

2. Somme arithmétique

Propriété (Somme d'une suite arithmétique) La somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique est :

$$\text{somme} = \text{nombre de termes} \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}$$

En particulier, si (u_n) est arithmétique, alors :

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n = (n+1) \frac{u_0 + u_n}{2}.$$

idée : deux sommes identiques forment un rectangle



Méthode Pour additionner des termes arithmétiques :

1. repérer le premier terme et le dernier terme ;
2. compter le nombre de termes ;
3. appliquer la formule.

Exemple On additionne :

$$20 + 25 + 30 + 35 + 40 + 45.$$

Il y a 6 termes, le premier est 20 et le dernier est 45. Donc :

$$20 + 25 + 30 + 35 + 40 + 45 = 6 \times \frac{20 + 45}{2} = 195.$$

Exemple Si $u_0 = 7$ et $r = 4$, alors $u_n = 7 + 4n$. On veut calculer :

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_{10}.$$

On a $u_{10} = 47$, et il y a 11 termes. Donc :

$$u_0 + \cdots + u_{10} = 11 \times \frac{7 + 47}{2} = 297.$$

Vigilance. De u_0 à u_n , il y a $n + 1$ termes. De u_1 à u_n , il y a n termes.

⇒ TD N13 – Partie B : sommes arithmétique

3. Somme géométrique

Propriété (Somme des puissances) Pour tout réel $q \neq 1$ et tout entier naturel n ,

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Si $q = 1$, alors

$$1 + q + \cdots + q^n = n + 1.$$

Propriété (Somme d'une suite géométrique) Si (u_n) est géométrique de premier terme u_0 et de raison $q \neq 1$, alors :

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Méthode Pour additionner des termes géométriques, identifier le premier terme, la raison q , et le nombre de termes. On utilise ensuite la formule adaptée.

Exemple On calcule :

$$3 + 6 + 12 + 24 + 48.$$

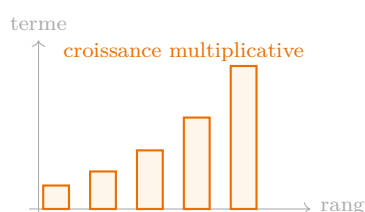
C'est une somme géométrique de premier terme 3, de raison 2, avec 5 termes. Donc :

$$3 + 6 + 12 + 24 + 48 = 3 \times \frac{1 - 2^5}{1 - 2} = 3 \times 31 = 93.$$

Exemple Si $u_n = 100 \times 1,02^n$, alors :

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_5 = 100 \times \frac{1 - 1,02^6}{1 - 1,02}.$$

Cette somme représente le cumul des six premiers termes.



Vigilance. La formule contient q^{n+1} quand on additionne de u_0 à u_n , car il y a $n + 1$ termes.

⇒ TD N13 – Partie C : sommes géométriques et p

4. Problèmes de seuil

Définition (Seuil) Un seuil est une valeur à atteindre ou à dépasser. Résoudre un problème de seuil consiste souvent à chercher le plus petit rang n tel qu'une condition soit vérifiée.

Méthode Pour traiter un seuil :

1. identifier la grandeur suivie : terme u_n ou somme cumulée ;
2. écrire la condition à atteindre ;
3. calculer ou tester les rangs ;
4. conclure avec le plus petit rang qui convient.

Exemple Une population vaut 5000 individus et augmente de 4 % par an. On note u_n la population après n années. Alors :

$$u_n = 5000 \times 1,04^n.$$

On cherche à partir de quand elle dépasse 7000. On teste :

$$u_8 = 5000 \times 1,04^8 \approx 6843,$$

$$u_9 = 5000 \times 1,04^9 \approx 7116.$$

Le seuil de 7000 est dépassé à partir de la 9^e année.

Exemple Un élève verse 20, puis 25, puis 30 euros, etc. On cherche quand le cumul dépasse 300 euros. Après $n + 1$ versements, de u_0 à u_n , avec $u_0 = 20$ et $r = 5$,

$$u_0 + \cdots + u_n = (n + 1) \frac{20 + (20 + 5n)}{2}.$$

On teste les valeurs de n jusqu'au premier cumul supérieur à 300.

Question	Grandeur à surveiller
Quand la population dépasse 7000 ?	terme u_n
Quand le total versé dépasse 300 ?	somme cumulée

Vigilance. Dans un problème de seuil, il faut conclure avec le premier rang qui convient, pas seulement avec un rang qui convient.

⇒ TD N13 – Partie D : seuils, essais organisés et i

5. Pourcentages et modèles discrets

Propriété (Coefficient multiplicateur)

Une évolution de $t\%$ correspond à un coefficient multiplicateur :

$$1 + \frac{t}{100}$$

pour une augmentation, et

$$1 - \frac{t}{100}$$

pour une diminution.

Propriété (Évolution à taux fixe) Si une quantité évolue à taux fixe $t\%$ à chaque étape, alors elle est modélisée par une suite géométrique. Avec une valeur initiale u_0 , on a :

$$u_n = u_0 \left(1 + \frac{t}{100}\right)^n$$

en cas d'augmentation de $t\%$.

Méthode Pour modéliser une situation discrète :

- repérer si l'évolution est additive ou multiplicative ;
- choisir une suite arithmétique ou géométrique ;
- préciser le rang initial et l'unité ;
- interpréter les résultats dans la situation.

Exemple Un prix de 250 euros baisse de 6% par mois. On note p_n le prix après n mois. Le coefficient multiplicateur est :

$$1 - \frac{6}{100} = 0,94.$$

Donc :

$$p_n = 250 \times 0,94^n.$$

Après 4 mois :

$$p_4 = 250 \times 0,94^4 \approx 195,18.$$

Exemple Une entreprise produit 1200 objets le premier mois et augmente sa production de 80 objets chaque mois. Le modèle est arithmétique :

$$u_n = 1200 + 80n.$$

Si elle augmente au contraire sa production de 8% chaque mois, le modèle est géométrique :

$$v_n = 1200 \times 1,08^n.$$

Vigilance. Une hausse de 8% n'ajoute pas 8 unités. Elle multiplie la valeur par 1,08.

⇒ TD N13 – Partie E : pourcentages, modèles et c

6. Synthèse

À RETENIR

- Une somme cumulée additionne plusieurs termes d'une suite.
- Pour une suite arithmétique :

$$\text{somme} = \text{nombre de termes} \times \frac{\text{premier} + \text{dernier}}{2}.$$

- Pour une suite géométrique de raison $q \neq 1$:

$$u_0 + \dots + u_n = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

- Un seuil demande souvent le plus petit rang qui vérifie une condition.
- Une évolution à taux fixe se modélise par une suite géométrique.
- Il faut distinguer une valeur au rang n et un cumul jusqu'au rang n .

APPLICATIONS IMMÉDIATES

- Calculer $4 + 7 + 10 + \dots + 31$.
- Calculer $2 + 6 + 18 + 54 + 162$.
- Si $u_0 = 12$, $r = 5$, calculer $u_0 + \dots + u_8$.
- Si $v_0 = 3$, $q = 2$, calculer $v_0 + \dots + v_6$.
- Donner le coefficient multiplicateur d'une hausse de 7% .
- Donner le coefficient multiplicateur d'une baisse de 12% .
- Modéliser 1000 euros placés à 3% par an.
- Expliquer la différence entre « dépasser un seuil » et « atteindre exactement un seuil ».

BESOIN D'UNE REPRISE ?

À retravailler en priorité : nombre de termes dans une somme, rang de départ, puissances, coefficient multiplicateur, différence entre terme et cumul, essais organisés pour un seuil.