

**OBJECTIFS**

- Reconnaître une suite arithmétique ou géométrique.
- Calculer une raison : différence constante ou quotient constant.
- Passer d'une relation de récurrence à une formule explicite.
- Calculer un terme éloigné sans lister tous les termes.
- Modéliser une évolution additive ou multiplicative.
- Interpréter une raison dans un contexte concret.

**ACTIVITÉ DE DÉPART**

Deux grandeurs évoluent chaque mois.

$$A_n : 100, 115, 130, 145, \dots$$

$$B_n : 100, 115, 132,25, 152,0875, \dots$$

1. Dans quelle situation ajoute-t-on toujours le même nombre ?
2. Dans quelle situation multiplie-t-on toujours par le même nombre ?
3. Quelle situation correspond à une augmentation de 15 % par mois ?

On veut distinguer un modèle additif et un modèle multiplicatif.

**1. Suite arithmétique**

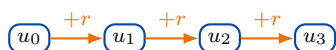
**Définition (Suite arithmétique)** Une suite  $(u_n)$  est arithmétique lorsqu'il existe un réel  $r$  tel que, pour tout rang  $n$ ,

$$u_{n+1} = u_n + r.$$

Le nombre  $r$  est appelé la raison de la suite.

**Propriété (Différence constante)** Une suite est arithmétique si la différence entre deux termes consécutifs est constante :

$$u_{n+1} - u_n = r.$$



**Méthode** Pour reconnaître une suite arithmétique dans un tableau, on calcule plusieurs différences  $u_{n+1} - u_n$ . Si elles sont toutes égales, la suite est arithmétique et cette différence commune est la raison.

**Exemple** La suite

$$5, \quad 8, \quad 11, \quad 14, \quad 17$$

est arithmétique de raison 3, car on ajoute 3 à chaque étape.

**Vigilance.** Une suite arithmétique correspond à une évolution additive : on ajoute toujours le même nombre, pas forcément un nombre positif.

**2. Terme général d'une suite arithmétique**

**Propriété (Formule explicite)** Si  $(u_n)$  est arithmétique de premier terme  $u_0$  et de raison  $r$ , alors, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$u_n = u_0 + nr.$$

Si le premier terme est  $u_1$ , alors, pour tout  $n \geq 1$ ,

$$u_n = u_1 + (n - 1)r.$$

**Propriété (Formule entre deux rangs)** Si  $(u_n)$  est arithmétique de raison  $r$ , alors, pour tous entiers  $p$  et  $n$ ,

$$u_n = u_p + (n - p)r.$$

**Méthode** Pour calculer un terme éloigné d'une suite arithmétique, on évite de lister tous les termes : on utilise la formule explicite en tenant compte du rang de départ.

**Exemple** Soit  $(u_n)$  arithmétique telle que  $u_0 = 12$  et  $r = 5$ . Alors :

$$u_n = 12 + 5n.$$

Donc

$$u_{20} = 12 + 5 \times 20 = 112.$$

**Exemple** Soit  $(v_n)$  arithmétique telle que  $v_1 = 7$  et  $r = -2$ . Alors :

$$v_n = 7 + (n - 1)(-2) = 9 - 2n.$$

Donc  $v_{10} = 9 - 20 = -11$ .

**Vigilance.** Si le premier terme est  $u_1$ , la formule n'est

⇒ TD N12 – Partie A : reconnaître une suite arithmétique et calculer sa raison.

### 3. Suite géométrique

**Définition (Suite géométrique)** Une suite  $(u_n)$  est géométrique lorsqu'il existe un réel  $q$  tel que, pour tout rang  $n$ ,

$$u_{n+1} = q u_n.$$

Le nombre  $q$  est appelé la raison de la suite.

**Propriété (Quotient constant)** Lorsque les termes sont non nuls, une suite est géométrique si le quotient entre deux termes consécutifs est constant :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = q.$$



**Méthode** Pour reconnaître une suite géométrique dans un tableau, on calcule plusieurs quotients  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ , lorsque les termes sont non nuls. Si ces quotients sont égaux, la suite est géométrique.

**Exemple** La suite

3, 6, 12, 24, 48

est géométrique de raison 2, car on multiplie par 2 à chaque étape.

**Vigilance.** Une suite géométrique correspond à une évolution multiplicative. Une augmentation de 15 % correspond à une multiplication par 1,15, pas à une addition de 15.

### 4. Terme général d'une suite géométrique

**Propriété (Formule explicite)** Si  $(u_n)$  est géométrique de premier terme  $u_0$  et de raison  $q$ , alors, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$u_n = u_0 q^n.$$

Si le premier terme est  $u_1$ , alors, pour tout  $n \geq 1$ ,

$$u_n = u_1 q^{n-1}.$$

**Propriété (Formule entre deux rangs)** Si  $(u_n)$  est géométrique de raison  $q$ , alors, pour tous entiers  $p$  et  $n$ ,

$$u_n = u_p q^{n-p}.$$

**Méthode** Pour calculer un terme éloigné d'une suite géométrique, on utilise une puissance de la raison. Le nombre d'étapes entre deux rangs est essentiel.

**Exemple** Soit  $(u_n)$  géométrique telle que  $u_0 = 80$  et  $q = 1,05$ . Alors :

$$u_n = 80 \times 1,05^n.$$

Donc

$$u_{12} = 80 \times 1,05^{12}.$$

**Exemple** Soit  $(v_n)$  géométrique telle que  $v_1 = 6$  et  $q = 3$ . Alors :

$$v_n = 6 \times 3^{n-1}.$$

Donc

$$v_5 = 6 \times 3^4 = 486.$$

**Vigilance.** Dans une suite géométrique, la raison est élevée au nombre d'étapes. De  $u_0$  à  $u_n$ , il y a  $n$  étapes ; de  $u_1$  à  $u_n$ , il y a  $n - 1$  étapes.

### 5. Modéliser une évolution

**Propriété (Deux modèles fondamentaux)**

- Une évolution avec ajout constant se modélise par une suite arithmétique.
- Une évolution à taux fixe se modélise par une suite géométrique.

**Méthode** Pour choisir le modèle :

- si l'énoncé dit « augmente de  $r$  unités », on pense arithmétique ;
- si l'énoncé dit « augmente de  $t\%$  », on pense géométrique ;
- si l'énoncé dit « diminue de  $t\%$  », on multiplie par  $1 - \frac{t}{100}$ .

| Situation             | Modèle                     |
|-----------------------|----------------------------|
| Ajouter 8 chaque mois | arithmétique, +8           |
| Augmenter de 8 %      | géométrique, $\times 1,08$ |
| Diminuer de 8 %       | géométrique, $\times 0,92$ |

**Exemple** Un capital de 1000 euros augmente de 3 % par an. On note  $C_n$  le capital après  $n$  années. Alors :

$$C_{n+1} = 1,03 C_n,$$

donc  $(C_n)$  est géométrique de raison 1,03, et

$$C_n = 1000 \times 1,03^n.$$

**Exemple** Une réserve contient 500 L d'eau et perd 12 L par jour. On note  $R_n$  la quantité d'eau après  $n$  jours. Alors :

$$R_{n+1} = R_n - 12,$$

donc  $(R_n)$  est arithmétique de raison  $-12$ , et

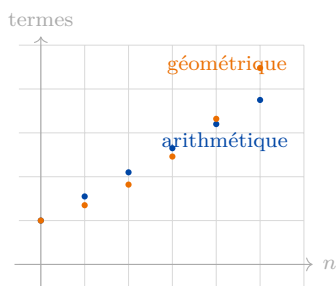
$$R_n = 500 - 12n.$$

**Vigilance.** « Augmenter de 20 » et « augmenter de 20 % » ne décrivent pas le même modèle.

⇒ TD N12 – Partie E : modélisation d'évolut

## 6. Comparer les deux modèles

**Propriété (Croissance additive et multiplicative)** Dans un modèle arithmétique, les écarts entre termes consécutifs sont constants. Dans un modèle géométrique, les rapports entre termes consécutifs sont constants.



**Méthode** Pour comparer deux modèles, calculer quelques termes, mais aussi identifier la règle. À long terme, une évolution multiplicative peut dépasser une évolution additive, même si elle semble plus lente au départ.

**Exemple** On compare deux salaires mensuels au départ de 1500 euros :

$$A_n = 1500 + 50n, \quad B_n = 1500 \times 1,03^n.$$

Le premier modèle ajoute 50 euros par mois ; le second applique une hausse de 3 % par mois. Les deux modèles n'ont pas la même logique.

**Vigilance.** Quelques premiers termes ne suffisent pas toujours à conclure sur le long terme. Il faut comprendre la règle de génération.

⇒ TD N12 – Partie F : comparer tableaux, formul

## 7. Synthèse

### À RETENIR

- Une suite arithmétique vérifie  $u_{n+1} = u_n + r$ .
- Son terme général est  $u_n = u_0 + nr$ , ou  $u_n = u_1 + (n-1)r$ .
- Une suite géométrique vérifie  $u_{n+1} = q u_n$ .
- Son terme général est  $u_n = u_0 q^n$ , ou  $u_n = u_1 q^{n-1}$ .
- Une évolution avec ajout constant est arithmétique.
- Une évolution à taux fixe est géométrique.
- Une hausse de  $t\%$  correspond au coefficient multiplicateur  $1 + \frac{t}{100}$ .

### APPLICATIONS IMMÉDIATES

1. Dire si 4, 7, 10, 13, ...
2. Donner le terme général si  $u_0 = 4$  et  $r = 3$ .
3. Calculer  $u_{25}$  pour cette suite.
4. Dire si 5, 10, 20, 40, ... est géométrique et donner sa raison.
5. Donner le terme général si  $v_0 = 5$  et  $q = 2$ .
6. Calculer  $v_{10}$  pour cette suite.
7. Modéliser une quantité de 200 qui augmente de 4 % par étape.
8. Modéliser une quantité de 200 qui diminue de 15 à chaque étape.

### BESOIN D'UNE REPRISE ?

À retravailler en priorité : différence  $u_{n+1} - u_n$ , quotient  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ , rang de départ, puissances, coefficient multiplicateur, traduction d'une hausse ou d'une baisse en pourcentage.