

OBJECTIFS

- Comprendre qu'une suite décrit une grandeur rang par rang.
- Utiliser correctement les notations u_n , u_0 , u_1 , u_{n+1} .
- Calculer les premiers termes d'une suite.
- Distinguer une formule explicite et une définition par récurrence.
- Passer d'un tableau, d'un motif ou d'un programme à des termes de suite.
- Représenter une suite sur un axe ou dans un repère discret.

ACTIVITÉ DE DÉPART

Une plante mesure 12 cm au départ. Chaque semaine, sa hauteur augmente de 3 cm.

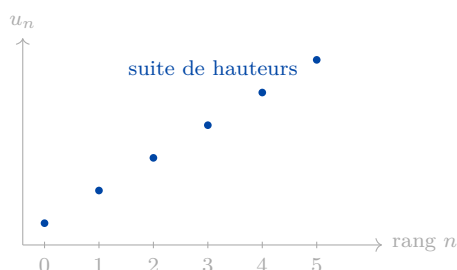
1. Quelle est sa hauteur après 1, 2, puis 3 semaines ?
2. Comment noter la hauteur après n semaines ?
3. Peut-on calculer directement la hauteur après 20 semaines ?

On veut modéliser une évolution à temps discret : semaine 0, semaine 1, semaine 2, etc.

1. Définir une suite

Définition (Suite numérique) Une suite numérique est une fonction dont la variable est un entier naturel. Elle associe à chaque rang n un nombre, noté u_n . On note souvent la suite (u_n) .

Définition (Terme et rang) Dans l'écriture u_n , le nombre n est le rang et le nombre u_n est le terme de rang n . Le premier terme peut être u_0 ou u_1 , selon l'énoncé.



Méthode Pour lire une suite, identifier d'abord le rang de départ. Si le premier terme est u_0 , alors u_3 est le quatrième terme de la liste. Si le premier terme est u_1 , alors u_3 est le troisième terme.

Exemple Si une suite commence par

$$u_0 = 12, \quad u_1 = 15, \quad u_2 = 18,$$

alors u_2 désigne le terme de rang 2, mais c'est le troisième terme écrit dans la liste.

Vigilance. Le petit nombre dans u_n n'est pas un exposant. Ainsi, u_3 ne signifie pas u^3 , mais le terme de rang 3.

2. Formule explicite

Définition (Formule explicite) Une suite est définie par une formule explicite lorsque u_n est donné directement en fonction de n . On peut alors calculer un terme sans connaître les précédents.

Méthode Pour calculer un terme avec une formule explicite, on remplace n par le rang demandé, puis on effectue le calcul.

Exemple On considère la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par

$$u_n = 2n^2 - 3n + 1.$$

Alors

$$u_0 = 1, \quad u_1 = 2 - 3 + 1 = 0,$$

$$u_2 = 8 - 6 + 1 = 3, \quad u_{10} = 200 - 30 + 1 = 171.$$

On peut calculer directement u_{10} , sans calculer tous les termes précédents.

n	0	1	2	10
u_n	1	0	3	171

Propriété (Avantage d'une formule explicite) Une formule explicite permet de calculer directement un terme éloigné, par exemple u_{50} , sans construire toute la suite terme après terme.

Vigilance. Dans une formule explicite, on remplace n , pas u_n . Par exemple, si $u_n = n^2 + 1$, alors $u_5 = 5^2 + 1$, et non $u_5 = u^5 + 1$.

⇒ TD N11 – Partie B : suites définies par une formule explicite

⇒ TD N11 – Partie A : notations, rangs et premiers termes

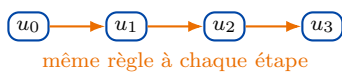
3. Définition par récurrence

Définition (Relation de récurrence) Une suite est définie par récurrence lorsque l'on donne un premier terme et une règle permettant de calculer chaque terme à partir d'un ou plusieurs termes précédents.

Propriété (Deux informations nécessaires) Pour définir une suite par récurrence, il faut :

- un terme initial, par exemple u_0 ;
- une relation, par exemple $u_{n+1} = 2u_n + 3$.

Sans terme initial, la suite n'est pas entièrement déterminée.



Méthode Pour calculer les premiers termes d'une suite récurrente, on part du terme initial, puis on applique la règle plusieurs fois. On ne peut pas sauter directement à un rang éloigné sans formule supplémentaire.

Exemple On définit la suite (v_n) par

$$v_0 = 4, \quad v_{n+1} = 2v_n - 1.$$

Alors

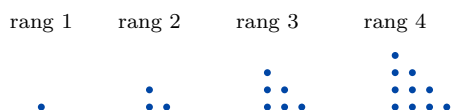
$$\begin{aligned} v_1 &= 2v_0 - 1 = 2 \times 4 - 1 = 7, \\ v_2 &= 2v_1 - 1 = 2 \times 7 - 1 = 13, \\ v_3 &= 2v_2 - 1 = 2 \times 13 - 1 = 25. \end{aligned}$$

Vigilance. L'écriture u_{n+1} signifie « terme suivant ». Elle ne signifie pas $u_n + 1$. En général, $u_{n+1} \neq u_n + 1$.

⇒ TD N11 – Partie C : suites définies par récurrence.

4. Suites issues de motifs

Définition (Suite définie par un motif) Une suite peut être définie par une configuration qui dépend du rang n . Le terme u_n compte alors une grandeur liée au motif : nombre de points, de carrés, de segments, etc.



Méthode Pour passer d'un motif à une suite :

1. choisir ce que l'on compte ;
2. calculer les premiers termes ;

3. chercher une régularité ;
4. proposer une formule ou une relation de passage d'un rang au suivant.

Exemple Dans le motif ci-dessus, on compte les points. On obtient :

$$u_1 = 1, \quad u_2 = 3, \quad u_3 = 6, \quad u_4 = 10.$$

Les premiers termes ne suffisent pas toujours à prouver une formule générale, mais ils permettent de conjecturer une règle.

Propriété (Plusieurs descriptions possibles) Une même suite peut parfois être décrite par un tableau, un motif, une relation de récurrence, une formule explicite ou un algorithme. Le choix dépend de ce que l'on veut calculer ou comprendre.

Vigilance. Quelques premiers termes ne déterminent pas toujours une suite de manière unique. Il faut connaître la règle de construction.

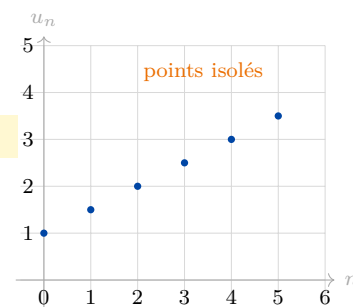
⇒ TD N11 – Partie D : motifs, tableaux et change

5. Représenter une suite

Définition (Représentation graphique) Une suite (u_n) peut être représentée par des points de coordonnées

$$(n; u_n).$$

Les abscisses sont des entiers : la représentation d'une suite est donc un nuage de points, pas une courbe continue.



Méthode Pour représenter une suite, construire un tableau de valeurs, placer les points $(n; u_n)$, puis observer l'évolution des termes. On ne relie pas les points sauf consigne particulière.

Exemple Pour $u_n = 1 + \frac{n}{2}$, on obtient :

$$u_0 = 1, \quad u_1 = 1,5, \quad u_2 = 2, \quad u_3 = 2,5.$$

On place les points $(0; 1)$, $(1; 1,5)$, $(2; 2)$, $(3; 2,5)$.

Vigilance. Une suite n'est définie qu'aux rangs entiers. Entre deux rangs, il n'y a pas de valeur de la suite.

APPLICATIONS IMMÉDIATES

1. Pour $u_n = 3n + 2$, calculer u_0, u_1, u_5 .
2. Pour $v_n = n^2 - 4n$, calculer v_2 et v_6 .
3. Une suite vérifie $w_0 = 5$ et $w_{n+1} = w_n + 4$. Calculer w_1, w_2, w_3 .
4. Expliquer la différence entre u_{n+1} et $u_n + 1$.
5. Dire si $u_n = 2n - 1$ est une définition explicite ou récurrente.
6. Dire si $u_0 = 1, u_{n+1} = 3u_n$ est une définition explicite ou récurrente.
7. Représenter les points $(0; 2), (1; 5), (2; 8), (3; 11)$.
8. Donner un exemple de situation réelle que l'on peut modéliser par une suite.

6. Synthèse

À RETENIR

- Une suite (u_n) associe à chaque rang entier n un nombre u_n .
- Le rang peut commencer à 0 ou à 1 : il faut lire l'énoncé.
- Une formule explicite donne u_n directement en fonction de n .
- Une définition par récurrence donne un terme initial et une règle pour passer au terme suivant.
- Une suite peut aussi venir d'un motif, d'un tableau ou d'un algorithme.
- Graphiquement, une suite se représente par des points $(n; u_n)$, avec n entier.

BESOIN D'UNE REPRISE ?

À retravailler en priorité : notation u_n , rang de départ, calcul d'image avec une formule, lecture d'une relation de récurrence, construction d'un tableau de valeurs et représentation de points discrets.