

OBJECTIFS

- Relier le signe de f' aux variations de f .
- Construire et exploiter un tableau de variations.
- Déterminer un maximum ou un minimum.
- Résoudre un problème d'optimisation.
- Utiliser les variations pour prouver une inégalité.
- Étudier la position relative de deux courbes.

ACTIVITÉ DE DÉPART

Une fonction f est dérivable sur $[-3; 4]$. On sait que :

$$f'(x) > 0 \text{ sur } [-3; 1[, \quad f'(x) < 0 \text{ sur }]1; 4].$$

1. Que peut-on dire de l'évolution de f avant 1 ?
2. Que peut-on dire de l'évolution de f après 1 ?
3. Que représente alors $f(1)$?

On veut déduire les variations de f à partir du signe de sa dérivée.

1. Signe de la dérivée et variations**Théorème (Lien entre f' et les variations)**

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

- Si $f'(x) > 0$ sur I , alors f est strictement croissante sur I .
- Si $f'(x) < 0$ sur I , alors f est strictement décroissante sur I .
- Si $f'(x) = 0$ sur I , alors f est constante sur I .

x	-3	1	4
$f'(x)$	+	0	-
f	$f(-3)$	$f(1)$	$f(4)$

Méthode Pour étudier les variations de f , on calcule d'abord $f'(x)$, puis on étudie son signe. On traduit ensuite le signe de f' dans un tableau de variations de f .

Exemple Si $f'(x) > 0$ sur $[-2; 5]$, alors f est croissante sur $[-2; 5]$. Ainsi, pour tous a et b de $[-2; 5]$, si $a < b$, alors $f(a) \leq f(b)$.

Vigilance. C'est le signe de f' qui donne les variations de f . Ne pas confondre $f(x) > 0$, qui parle de signe, et $f'(x) > 0$, qui parle de croissance.

⇒ TD N10 – Partie A : lire le signe de f' et construire un tableau de variations.

2. Construire un tableau de variations

Méthode Pour étudier une fonction dérivable :

1. préciser l'ensemble ou l'intervalle d'étude ;
2. calculer $f'(x)$;
3. résoudre $f'(x) = 0$ et étudier le signe de f' ;
4. dresser le tableau de variations ;
5. conclure par des phrases.

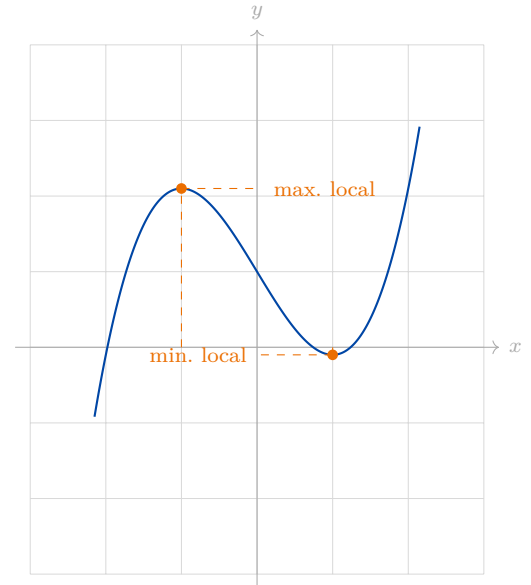
Exemple On étudie $f(x) = x^3 - 3x + 1$ sur $[-3; 3]$. On a :

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1).$$

Donc $f'(x) = 0$ pour $x = -1$ ou $x = 1$, et

$$f(-3) = -17, \quad f(-1) = 3, \quad f(1) = -1, \quad f(3) = 19.$$

x	-3	-1	1	3	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
f	-17	$\nearrow$ 3	$\searrow$ -1	$\nearrow$ 19	



Vigilance. Un tableau de variations doit contenir les valeurs utiles de f , pas seulement les signes de f' .

⇒ TD N10 – Partie B : dérivée, signe et tableau complet.

3. Extremums

Définition (Maximum et minimum) Dire que f admet un maximum M sur un intervalle I signifie que, pour tout $x \in I$, $f(x) \leq M$. Dire que f admet un minimum m sur I signifie que, pour tout $x \in I$, $f(x) \geq m$.

Propriété (Extremum local et dérivée) Si f est dérivable et admet un extremum local en un point intérieur a , alors

$$f'(a) = 0.$$

Graphiquement, la tangente y est horizontale.

Propriété (Changement de signe de f') Si f' passe de positif à négatif en a , alors f admet un maximum local en a . Si f' passe de négatif à positif en a , alors f admet un minimum local en a .

Méthode Pour déterminer les extremums sur un intervalle fermé, on utilise le tableau de variations et on compare les valeurs importantes : bornes de l'intervalle et points où f' s'annule ou change de signe.

Exemple Dans le tableau précédent, f atteint un maximum local égal à 3 pour $x = -1$, puis un minimum local égal à -1 pour $x = 1$. Sur l'intervalle $[-3; 3]$, le maximum global est 19, atteint pour $x = 3$.

Vigilance. La condition $f'(a) = 0$ ne suffit pas toujours à garantir un extremum. Il faut regarder le signe de f' autour de a .

⇒ TD N10 – Partie C : extremums locaux, globaux et tangentes horizontales.

4. Optimisation

Définition (Optimiser) Optimiser, c'est chercher la plus grande ou la plus petite valeur possible d'une quantité, en tenant compte des contraintes du problème.

Méthode Pour résoudre un problème d'optimisation :

1. choisir une variable et préciser son intervalle possible ;
2. exprimer la quantité à optimiser comme une fonction ;
3. étudier les variations de cette fonction ;
4. interpréter l'extremum dans le contexte.

Exemple On veut fabriquer un rectangle de périmètre 20 cm.

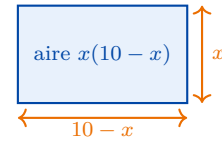
On note x sa largeur et $A(x)$ son aire.

La longueur vaut $10 - x$, donc $A(x) = x(10 - x) = -x^2 + 10x$, avec $x \in [0; 10]$.

On a $A'(x) = -2x + 10$.

Ainsi, $A'(x) > 0$ si $x < 5$, $A'(5) = 0$, et $A'(x) < 0$ si $x > 5$. L'aire est donc maximale pour $x = 5$, et vaut 25 cm^2 .

Vigilance. Dans un problème concret, l'intervalle de valeurs possibles est indispensable. Un extremum hors contexte peut n'avoir aucun sens.



x	0	5	10
$A'(x)$		+	-
A	0	25	0

⇒ TD N10 – Partie D : problèmes d'optimisation et interprétation.

5. Inégalités et positions relatives

Méthode Pour prouver une inégalité du type $f(x) \geq g(x)$ sur un intervalle I , on étudie la fonction différence :

$$h(x) = f(x) - g(x).$$

Il suffit ensuite de montrer que $h(x) \geq 0$ sur I .

Exemple On veut prouver que, pour tout réel x ,

$$x^2 + 1 \geq 2x.$$

On pose

$$h(x) = x^2 + 1 - 2x = x^2 - 2x + 1.$$

Alors

$$h'(x) = 2x - 2.$$

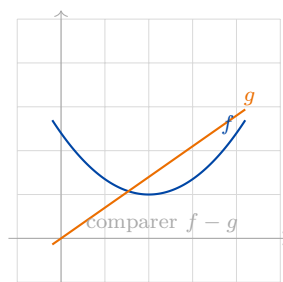
La fonction h est décroissante sur $] -\infty; 1]$, puis croissante sur $[1; +\infty[$. Elle admet donc un minimum en 1, et

$$h(1) = 0.$$

Ainsi, pour tout réel x , $h(x) \geq 0$, donc

$$x^2 + 1 \geq 2x.$$

Propriété (Position relative) Étudier la position relative des courbes de f et g , c'est déterminer où la courbe de f est au-dessus, au-dessous ou confondue avec celle de g . On étudie le signe de $f(x) - g(x)$.



Vigilance. Pour comparer deux courbes, on ne compare pas les expressions séparément : on étudie le signe de leur différence.

6. Synthèse

À RETENIR

- Si $f'(x) > 0$ sur un intervalle, alors f y est croissante.
- Si $f'(x) < 0$ sur un intervalle, alors f y est décroissante.
- Si f admet un extremum local en un point intérieur a , alors $f'(a) = 0$.
- Un changement de signe de f' permet de repérer un maximum ou un minimum local.
- Pour optimiser, on modélise par une fonction puis on étudie ses variations.
- Pour prouver $f(x) \geq g(x)$, on étudie $f(x) - g(x)$.

APPLICATIONS IMMÉDIATES

1. Si $f'(x) > 0$ sur $[1; 4]$, que peut-on dire de f ?
2. Si f' passe de $+$ à $-$ en 2, que peut-on dire de $f(2)$?
3. Dériver $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$.
4. Résoudre $f'(x) = 0$ pour cette fonction.
5. Dresser le tableau de variations de $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$.
6. Déterminer ses extremums locaux.
7. Prouver que $x^2 + 4 \geq 4x$ pour tout réel x .
8. Expliquer comment comparer deux courbes à l'aide d'une différence.

BESOIN D'UNE REPRISE ?

À retravailler en priorité : calcul de dérivées, factorisation d'une dérivée, tableaux de signes, lecture d'un tableau de variations, extremums, intervalles de définition et traduction d'un problème en fonction.