

OBJECTIFS

- passer du nombre dérivé à la fonction dérivée ;
- connaître les dérivées des fonctions de référence ;
- utiliser les règles de dérivation : somme, produit, inverse, quotient ;
- dériver une fonction de la forme $x \mapsto g(ax + b)$;
- choisir la règle adaptée avant de calculer.

ACTIVITÉ DE DÉPART

On sait calculer un nombre dérivé en un point.
Pour $f(x) = x^2$, on obtient :

$$f'(0) = 0, \quad f'(1) = 2, \quad f'(2) = 4, \quad f'(-1) = -2.$$

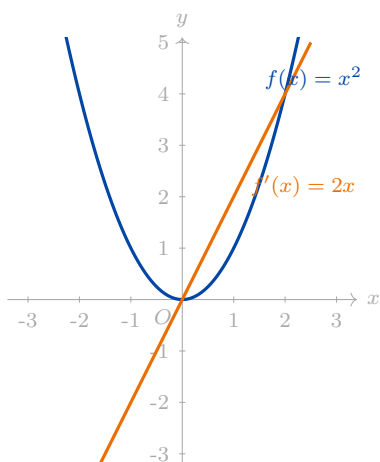
1. Quel lien semble-t-il exister entre x et $f'(x)$?
2. Quelle fonction permettrait de donner directement la pente de la tangente en chaque abscisse ?
3. Pourquoi est-ce plus efficace que de recommencer un calcul de taux à chaque point ?

1. Fonction dérivée

Dans N08, on a calculé un nombre dérivé $f'(a)$ pour une abscisse fixée a . Ici, on regroupe tous ces nombres dérivés dans une nouvelle fonction.

Définition (Fonction dérivée) Soit f une fonction définie sur un intervalle I . Si f est dérivable en tout réel x de I , alors on dit que f est dérivable sur I . La fonction qui à tout $x \in I$ associe le nombre dérivé $f'(x)$ s'appelle la fonction dérivée de f , notée f' .

Propriété (Interprétation graphique) Pour chaque x , le nombre $f'(x)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse x .



Méthode Pour interpréter f' , on lit $f'(x)$ comme une pente locale. Si $f'(x) > 0$, la tangente monte ; si $f'(x) < 0$, la tangente descend ; si $f'(x) = 0$, la tangente est horizontale.

Exemple Pour $f(x) = x^2$, la fonction dérivée est $f'(x) = 2x$. Ainsi $f'(3) = 6$: au point d'abscisse 3, la tangente a pour coefficient directeur 6.

Vigilance. La fonction f et la fonction f' ne donnent pas la même information : $f(x)$ est une image, tandis que $f'(x)$ est une pente.

⇒ **TD N09 – Partie A : distinguer fonction, nombre dérivé et fonction dérivée.**

2. Dérivées usuelles

Propriété (Fonctions de référence) Les fonctions suivantes sont dérivables sur les intervalles indiqués.

fonction $f(x)$	ensemble de dérivabilité	dérivée $f'(x)$
k constante	$\mathbb{R}$	0
x	$\mathbb{R}$	1
x^2	$\mathbb{R}$	$2x$
x^3	$\mathbb{R}$	$3x^2$
$x^n, n \in \mathbb{Z}$	là où x^n est définie	nx^{n-1}
$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$]0; +\infty[$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

Méthode Avant de dériver, commencer par reconnaître la fonction de référence : constante, identité, puissance, inverse ou racine carrée. Vérifier ensuite l'ensemble sur lequel la fonction est dérivable.

Exemple La fonction $f(x) = x^7$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 7x^6$. La fonction $g(x) = x^{-3} = \frac{1}{x^3}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $g'(x) = -3x^{-4} = -\frac{3}{x^4}$.

Propriété (Démonstration pour la fonction carré) Pour $f(x) = x^2$, on calcule le taux de variation entre a et $a + h$, avec $h \neq 0$:

$$\frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h} = 2a + h.$$

Lorsque h se rapproche de 0, ce quotient se rapproche de $2a$. Donc $f'(a) = 2a$, et ainsi $(x^2)' = 2x$.

Vigilance. La formule $(x^n)' = nx^{n-1}$ ne dispense pas de vérifier le domaine. Par exemple $x^{-2} = \frac{1}{x^2}$ n'est pas définie en 0.

⇒ TD N09 – Partie A : dérivées des fonctions de référence.

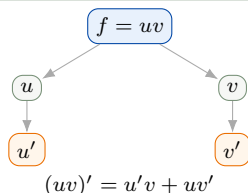
3. Somme, coefficient multiplicateur et produit

Propriété (Somme et coefficient) Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I , et k un réel. Alors $u + v$ et ku sont dérivables sur I , et

$$(u + v)' = u' + v' \quad \text{et} \quad (ku)' = ku'.$$

Propriété (Produit) Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I . Alors uv est dérivable sur I , et

$$(uv)' = u'v + uv'.$$



Méthode Pour dériver une somme, on dérive terme à terme. Pour dériver un produit, on ne dérive pas seulement chaque facteur : on utilise $(uv)' = u'v + uv'$.

Exemple Pour $f(x) = 3x^4 - 5x^2 + 7x - 1$, on obtient $f'(x) = 12x^3 - 10x + 7$.

Pour $g(x) = x^2(3x-1)$, on pose $u(x) = x^2$ et $v(x) = 3x-1$. Alors $u'(x) = 2x$, $v'(x) = 3$, donc

$$g'(x) = 2x(3x-1) + 3x^2 = 9x^2 - 2x.$$

Propriété (Démonstration du produit) Pour $f = uv$, on écrit

$$u(a+h)v(a+h) - u(a)v(a) = [u(a+h) - u(a)]v(a+h) + u(a)[v(a+h) - v(a)].$$

En divisant par h , puis en faisant tendre h vers 0, on obtient $(uv)'(a) = u'(a)v(a) + u(a)v'(a)$.

Vigilance. Il est faux d'écrire $(uv)' = u'v'$. Le produit donne deux termes : $u'v$ et uv' .

⇒ TD N09 – Partie B : dériver des sommes et des produits.

4. Inverse et quotient

Propriété (Inverse) Soit v une fonction dérivable sur un intervalle I , telle que $v(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$. Alors $\frac{1}{v}$ est dérivable sur I , et

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}.$$

Propriété (Quotient) Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I , avec $v(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$. Alors $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I , et

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Méthode Pour dériver un quotient, identifier u , v , u' , v' , puis remplacer dans

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Le carré au dénominateur porte sur toute la fonction v .

Exemple Soit $f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$, définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$. On pose $u(x) = 2x+1$ et $v(x) = x-3$. Alors $u'(x) = 2$ et $v'(x) = 1$. Donc

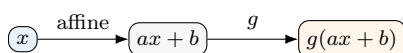
$$f'(x) = \frac{2(x-3) - (2x+1)}{(x-3)^2} = \frac{-7}{(x-3)^2}.$$

Vigilance. Avant de dériver un quotient, on exclut les valeurs qui annulent le dénominateur. La dérivée n'a de sens que là où la fonction est définie.

⇒ TD N09 – Partie C : dériver inverses et quotients.

5. Fonction composée avec une fonction affine

Définition (Composition avec une fonction affine) Une fonction de la forme $x \mapsto g(ax+b)$ s'obtient en appliquant d'abord la fonction affine $x \mapsto ax+b$, puis la fonction g .



Propriété (Dérivée de $g(ax+b)$) Soit g une fonction dérivable. La fonction f définie par $f(x) = g(ax+b)$ est dérivable là où elle est définie, et

$$f'(x) = a g'(ax+b).$$

Méthode Pour dériver $g(ax+b)$, on repère d'abord l'expression intérieure $ax+b$. On dérive la fonction extérieure g , puis on multiplie par le coefficient a .

Exemple Pour $f(x) = (5x-2)^3$, on reconnaît $g(X) = X^3$, donc $g'(X) = 3X^2$, et $a = 5$. Ainsi

$$f'(x) = 5 \times 3(5x-2)^2 = 15(5x-2)^2.$$

Exemple Pour $h(x) = \sqrt{3x+1}$, la fonction est dérivable lorsque $3x+1 > 0$, c'est-à-dire sur $] -\frac{1}{3}; +\infty[$. On obtient

$$h'(x) = 3 \times \frac{1}{2\sqrt{3x+1}} = \frac{3}{2\sqrt{3x+1}}.$$

Vigilance. Ne pas oublier le coefficient de la fonction affine intérieure. Par exemple, la dérivée de $(2x+1)^5$ n'est pas seulement $5(2x+1)^4$, mais $10(2x+1)^4$.

⇒ **TD N09 – Partie C : dériver des fonctions composées avec $ax+b$.**

6. Choisir la bonne règle

Méthode Avant de dériver, lire la structure de l'expression :

- somme ou différence : dériver terme à terme ;
- coefficient multiplicateur : garder le coefficient ;
- produit : utiliser $(uv)' = u'v + uv'$;
- inverse : utiliser $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$;
- quotient : utiliser $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$;
- puissance de $ax+b$: utiliser $a g'(ax+b)$.

Exemple Pour $f(x) = \frac{x^2+1}{2x-3}$, on reconnaît un quotient. On pose $u(x) = x^2+1$, $v(x) = 2x-3$, $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = 2$. Alors

$$f'(x) = \frac{2x(2x-3) - 2(x^2+1)}{(2x-3)^2} = \frac{2x^2 - 6x - 2}{(2x-3)^2}.$$

Vigilance. On ne développe pas systématiquement. Développer peut aider pour une somme de puissances, mais il vaut mieux garder une forme factorisée ou composée lorsque la structure est claire.

⇒ **TD N09 – Partie D : choisir la règle adaptée et traiter des expressions mélangées.**

7. Synthèse

A RETENIR

- La fonction dérivée f' associe à chaque x le nombre dérivé $f'(x)$.
- $f'(x)$ est la pente de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse x .
- Les dérivées usuelles doivent être connues : constante, x , x^2 , x^3 , x^n , $\frac{1}{x}$, $\sqrt{x}$.
- $(u+v)' = u' + v'$, $(ku)' = ku'$, $(uv)' = u'v + uv'$.
- $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$ et $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.
- Si $f(x) = g(ax+b)$, alors $f'(x) = a g'(ax+b)$.
- Toujours vérifier l'ensemble sur lequel la fonction est définie et dérivable.

APPLICATIONS IMMÉDIATES

1. Dériver $f(x) = 4x^3 - 2x^2 + 7x - 5$.
2. Dériver $g(x) = x^2(3x+1)$.
3. Dériver $h(x) = \frac{5}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$.
4. Dériver $u(x) = \frac{x+1}{x-2}$.
5. Dériver $v(x) = (3x-4)^5$.
6. Dériver $w(x) = \sqrt{2x+7}$, en précisant l'intervalle de dérivabilité.

BESOIN D'UNE REPRISE ?

À retravailler en priorité :

- reconnaître la structure d'une fonction ;
- connaître les dérivées usuelles ;
- ne pas confondre produit et composition ;
- appliquer correctement la formule du quotient ;
- ne pas oublier le coefficient a dans $g(ax+b)$;
- préciser l'ensemble de dérivabilité.

⇒ **TD N09 – Toutes les parties : dérivées usuelles, opérations et choix de méthode.**