

OBJECTIFS

- passer d'un taux de variation à un nombre dérivé ;
- interpréter $f'(a)$ comme une pente locale ;
- reconnaître la tangente comme limite de sécantes ;
- déterminer une équation de tangente ;
- utiliser une approximation locale de $f(a+h)$.

ACTIVITE DE DEPART

Pour $f(x) = x^2$, on étudie les taux de variation entre 2 et $2+h$.

h	1	0,5	0,1	-0,1
$\frac{f(2+h) - f(2)}{h}$	5	4,5	4,1	3,9

1. Vers quel nombre ces taux semblent-ils se rapprocher ?
2. Que représente graphiquement chaque taux ?
3. Peut-on parler d'une pente « au point d'abscisse 2 » ?

1. Du taux de variation au nombre dérivé

Dans N07, on a mesuré une évolution moyenne entre deux abscisses. Ici, on cherche une information locale : la pente au voisinage d'un seul point.

Définition (Taux de variation entre a et $a+h$) Soit f une fonction définie au voisinage de a . Pour $h \neq 0$, le taux de variation de f entre a et $a+h$ est

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Définition (Nombre dérivé) Si le quotient $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ se rapproche d'un même nombre réel lorsque h se rapproche de 0, alors on dit que f est dérivable en a . Ce nombre est le nombre dérivé de f en a , noté $f'(a)$.

Méthode Pour calculer un nombre dérivé avec la définition, on calcule $f(a+h)$, on forme $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$, puis on simplifie tant que $h \neq 0$. On observe ensuite le nombre obtenu lorsque h devient très petit.

Exemple Pour $f(x) = x^2$, on calcule le nombre dérivé en 2. On a $f(2) = 4$ et $f(2+h) = (2+h)^2 = 4+4h+h^2$. Donc, pour $h \neq 0$,

$$\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{4 + 4h + h^2 - 4}{h} = \frac{4h + h^2}{h} = 4 + h.$$

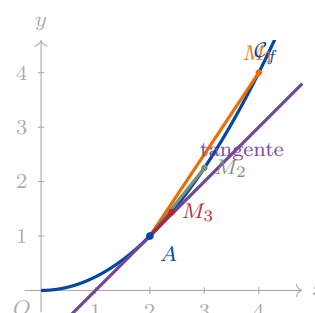
Lorsque h se rapproche de 0, $4+h$ se rapproche de 4. Donc $f'(2) = 4$.

Vigilance. Dans le quotient $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$, on garde toujours $h \neq 0$. On ne remplace pas directement h par 0 dans le quotient : on simplifie d'abord, puis on observe ce qui se passe lorsque h devient très petit.

⇒ **TD N08 – Partie A : calculer des taux de variation et approcher un nombre dérivé.**

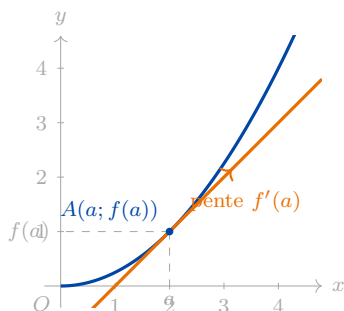
2. Interprétation graphique : de la sécante à la tangente

Sur la courbe, on fixe un point $A(a; f(a))$. Un autre point $M(a+h; f(a+h))$ donne une sécante (AM) . Quand M se rapproche de A , les sécantes se rapprochent d'une droite limite : la tangente.



Définition (Tangente) Si f est dérivable en a , la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point $A(a; f(a))$ est la droite passant par A et ayant pour coefficient directeur $f'(a)$.

Propriété (Interprétation graphique) Le nombre dérivé $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a .



Méthode Pour lire graphiquement un nombre dérivé, on lit la pente de la tangente. On choisit deux points lisibles sur la tangente, puis on calcule $\frac{\text{variation verticale}}{\text{variation horizontale}}$.

Exemple Si la tangente au point d'abscisse 2 passe par les points (2; 3) et (5; 9), alors $f'(2) = \frac{9-3}{5-2} = 2$.

Vigilance. La pente de la tangente donne une information locale. Elle ne suffit pas à décrire toutes les variations de la fonction sur un intervalle.

⇒ TD N08 – Partie B : lire un nombre dérivé et relier tangente et pente.

3. Équation de la tangente

Théorème (Équation de la tangente) Soit f une fonction dérivable en a . La tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point $A(a; f(a))$ a pour équation

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

Méthode Pour déterminer l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a , on calcule $f(a)$, puis $f'(a)$. On remplace ensuite dans la formule $y = f'(a)(x - a) + f(a)$, puis on réduit si nécessaire.

Exemple Pour $f(x) = x^2$, on a montré que $f'(2) = 4$ et $f(2) = 4$. La tangente à la courbe de f au point d'abscisse 2 a donc pour équation $y = 4(x - 2) + 4$, c'est-à-dire $y = 4x - 4$.

Propriété (Démonstration de la formule) Une droite de coefficient directeur m passant par un point $A(a; f(a))$ vérifie $y - f(a) = m(x - a)$. Pour la tangente, le coefficient directeur vaut $m = f'(a)$. On obtient donc $y - f(a) = f'(a)(x - a)$, puis $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Vigilance. Dans l'équation de la tangente, x est la variable de la droite. Le nombre a est fixé : c'est l'abscisse du point de tangence.

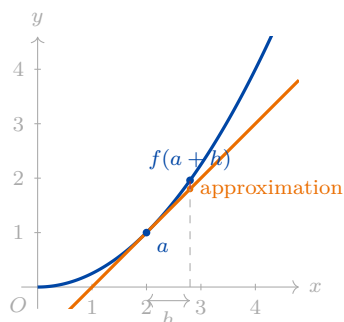
⇒ TD N08 – Partie B : déterminer des équations de tangentes.

4. Approximation locale

Propriété (Approximation affine locale) Si f est dérivable en a , alors pour h proche de 0, on peut écrire

$$f(a + h) \approx f(a) + hf'(a).$$

Cette approximation revient à remplacer localement la courbe par sa tangente.



Méthode Pour approximer $f(a + h)$, on identifie a , h , $f(a)$ et $f'(a)$, puis on calcule $f(a) + hf'(a)$. Cette méthode est pertinente lorsque h est petit.

Exemple Pour $f(x) = x^2$, au voisinage de 2, on a $f(2) = 4$ et $f'(2) = 4$. Donc $f(2 + h) \approx 4 + 4h$. Pour $h = 0,01$, on obtient $f(2,01) \approx 4 + 4 \times 0,01 = 4,04$. La valeur exacte est $2,01^2 = 4,0401$.

Vigilance. Une approximation locale n'est pas une égalité exacte en général. Elle devient mauvaise si l'on s'éloigne trop du point a .

⇒ TD N08 – Partie C : utiliser la tangente pour approximer une valeur.

5. Quand le nombre dérivé n'existe pas

Propriété (Existence du nombre dérivé) Pour que $f'(a)$ existe, les taux $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ doivent se rapprocher d'un même nombre réel lorsque h se rapproche de 0. Si les valeurs ne se stabilisent pas, ou si elles deviennent arbitrairement grandes, alors f n'est pas dérivable en a .

Exemple Pour $f(x) = \sqrt{x}$ en 0, avec $h > 0$, on obtient

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}}.$$

Lorsque h se rapproche de 0, $\frac{1}{\sqrt{h}}$ devient de plus en plus grand. Il n'y a donc pas de nombre dérivé réel en 0.

Vigilance. Toutes les fonctions ne sont pas dérivables en tout point. Un angle, une pointe ou une pente qui devient verticale peut empêcher l'existence d'un nombre dérivé.

⇒ TD N08 – Partie D : distinguer nombre dérivé, tangente et non-dérivabilité.

6. Synthèse

A RETENIR

- Le taux de variation entre a et $a+h$ est $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$, avec $h \neq 0$.
- Si ce quotient se rapproche d'un nombre réel quand h se rapproche de 0, ce nombre est $f'(a)$.
- Graphiquement, $f'(a)$ est la pente de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a .
- L'équation de cette tangente est $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.
- Localement, $f(a+h) \approx f(a) + hf'(a)$.
- Le nombre dérivé peut ne pas exister.

APPLICATIONS IMMEDIATES

1. Pour $f(x) = x^2$, calculer $f'(3)$ avec la définition.
2. Pour $g(x) = 3x^2 - 1$, calculer le taux entre 1 et $1+h$, puis en déduire $g'(1)$.
3. Une tangente passe par $A(2;5)$ et $B(4;9)$. Donner le nombre dérivé correspondant.
4. Si $f(1) = 3$ et $f'(1) = 4$, écrire l'équation de la tangente au point d'abscisse 1.
5. Avec les mêmes données, approximer $f(1,02)$.
6. Expliquer pourquoi $h = 0$ est interdit dans $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

BESOIN D'UNE REPRISE ?

À retravailler en priorité :

- calculer un taux de variation ;
- simplifier une expression avec h ;
- lire une pente sur un graphique ;
- distinguer sécante et tangente ;
- appliquer la formule $y = f'(a)(x - a) + f(a)$;
- interpréter une approximation locale.

⇒ TD N08 – Toutes les parties : nombre dérivé, tangente, équation et approximation locale.