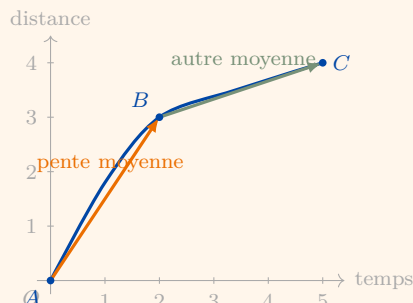


OBJECTIFS

- calculer un accroissement de x et un accroissement de $f(x)$;
- calculer un taux de variation entre deux valeurs ;
- interpréter ce taux comme une pente moyenne ;
- relier taux de variation et coefficient directeur d'une sécante ;
- comprendre que le taux dépend en général de l'intervalle choisi ;
- préparer la notion de nombre dérivé sans la formaliser encore.

ACTIVITÉ DE DÉPART

On suit la distance parcourue par un mobile en fonction du temps.



1. Entre A et B , de combien le temps augmente-t-il ? de combien la distance augmente-t-elle ?
2. Entre B et C , le mobile avance-t-il plus vite en moyenne ?
3. Comment mesurer une « vitesse moyenne » à partir du graphique ?

1. Accroissement moyen

Définition (Accroissements) Soit f une fonction définie sur un intervalle. Entre deux réels distincts a et b , l'accroissement de la variable est $b - a$, et l'accroissement de l'image est $f(b) - f(a)$.

Propriété (Taux de variation) Le taux de variation de f entre a et b , avec $a \neq b$, est le quotient $\tau_f(a; b) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Il mesure l'accroissement moyen de $f(x)$ par unité d'accroissement de x .

Méthode Pour calculer un taux de variation, on calcule d'abord les deux images $f(a)$ et $f(b)$, puis on forme le quotient $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$. On garde l'ordre choisi : arrivée moins départ au numérateur et au dénominateur.

Exemple Pour $f(x) = x^2$, entre 1 et 3, on a $f(1) = 1$ et $f(3) = 9$. Le taux de variation vaut $\tau_f(1; 3) = \frac{9 - 1}{3 - 1} = 4$. En moyenne, lorsque x augmente de 1, l'image augmente de 4 sur cet intervalle.

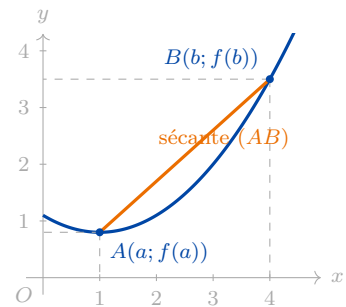
Vigilance. Le taux de variation n'est pas une image. C'est un quotient qui compare deux variations : variation de $f(x)$ divisée par variation de x .

⇒ **TD N07 – Partie A : accroissements, calculs directs et interprétation.**

2. Interprétation graphique : pente d'une sécante

Définition (Sécante) Soient $A(a; f(a))$ et $B(b; f(b))$ deux points de la courbe représentative $\mathcal{C}_f$, avec $a \neq b$. La droite (AB) est une sécante à la courbe.

Propriété (Taux de variation et pente) Le taux de variation $\tau_f(a; b)$ est le coefficient directeur de la droite sécante passant par $A(a; f(a))$ et $B(b; f(b))$.



Méthode Graphiquement, on lit la pente moyenne d'une sécante comme un déplacement vertical divisé par un déplacement horizontal : $\text{pente} = \frac{\text{variation verticale}}{\text{variation horizontale}}$.

Exemple Si une sécante passe par $A(1; 2)$ et $B(5; 8)$, son coefficient directeur vaut $\frac{8-2}{5-1} = \frac{6}{4} = 1,5$. Le taux de variation correspondant est donc 1,5.

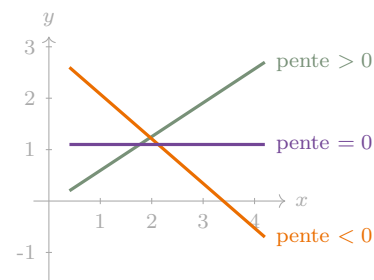
Vigilance. Une sécante coupe ou rencontre la courbe en deux points. Elle ne décrit pas forcément toute la courbe entre ces deux points : elle résume seulement une évolution moyenne.

⇒ TD N07 – Partie B : pentes, sécantes et lectures graphiques.

3. Signe et unité d'un taux de variation

Propriété (Signe du taux) Si $\tau_f(a; b) > 0$, alors l'image augmente en moyenne entre a et b . Si $\tau_f(a; b) < 0$, elle diminue en moyenne. Si $\tau_f(a; b) = 0$, les deux images $f(a)$ et $f(b)$ sont égales.

Méthode Pour interpréter le signe, il faut toujours préciser l'intervalle étudié. Dire seulement « la fonction augmente » n'est pas assez précis : on doit dire entre quelles valeurs.



Propriété (Unité) L'unité du taux de variation est l'unité de $f(x)$ divisée par l'unité de x . Une distance en mètres divisée par un temps en secondes donne une vitesse moyenne en mètres par seconde.

Exemple Si une voiture parcourt 150 km entre 8 h et 10 h, le taux de variation de la distance par rapport au temps vaut $\frac{150}{2} = 75$. On l'interprète comme une vitesse moyenne de 75 km/h.

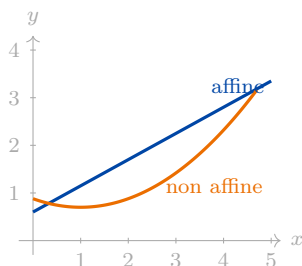
Vigilance. Un taux positif ne signifie pas que toutes les valeurs de la fonction sont positives. Il signifie seulement que les images augmentent en moyenne entre deux abscisses.

⇒ TD N07 – Partie B : interpréter un taux dans un contexte et contrôler son unité.

4. Le taux dépend de l'intervalle choisi

Propriété (Fonction affine) Pour une fonction affine $f(x) = mx + p$, le taux de variation entre deux réels distincts est toujours égal à m . La pente est donc constante.

Propriété (Fonction non affine) Pour une fonction non affine, le taux de variation dépend en général des deux valeurs choisies. Changer d'intervalle peut changer la pente moyenne.



Exemple Pour $f(x) = 2x + 1$, entre 1 et 4, le taux vaut $\frac{9-3}{4-1} = 2$. Entre 5 et 8, il vaut encore 2.
 Pour $g(x) = x^2$, entre 0 et 1, le taux vaut 1, tandis qu'entre 2 et 3, il vaut $\frac{9-4}{3-2} = 5$. La pente moyenne dépend donc de l'intervalle.

Méthode Avant d'interpréter un taux, repérer si la fonction étudiée est affine ou non. Si elle est affine, une seule pente décrit toute la droite. Sinon, chaque intervalle donne une information locale à cet intervalle.

Vigilance. Sur une courbe, une sécante peut monter alors que la fonction a pu descendre puis remonter entre les deux points. Le taux de variation donne une moyenne, pas le détail du trajet.

⇒ **TD N07 – Partie C : comparer plusieurs intervalles et éviter les conclusions abusives.**

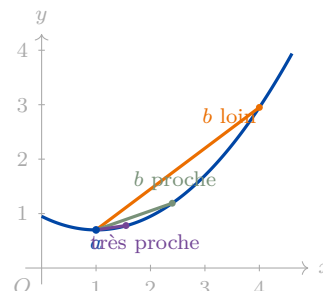
5. Notation avec un pas h

Définition (Pas h) Pour étudier un taux de variation à partir d'un point fixe a , on peut écrire $b = a + h$, avec $h \neq 0$. Le nombre h représente l'écart entre les deux abscisses.

Propriété (Taux entre a et $a + h$) Le taux de variation de f entre a et $a + h$ est $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$, avec $h \neq 0$.

Méthode Cette écriture est utile lorsque l'on veut rapprocher progressivement le deuxième point du premier. On garde a fixé, puis on choisit des valeurs de h de plus en plus petites.

Exemple Pour $f(x) = x^2$ et $a = 1$, le taux entre 1 et $1 + h$ vaut $\frac{(1+h)^2 - 1}{h} = \frac{2h + h^2}{h} = 2 + h$, avec $h \neq 0$. Si $h = 1$, le taux vaut 3. Si $h = 0,1$, il vaut 2,1.



Vigilance. On n'a pas le droit de prendre $h = 0$ dans un taux de variation : le dénominateur serait nul. L'idée de rapprocher h de 0 sera formalisée dans la notion suivante.

⇒ **TD N07 – Partie C : calculs avec $a + h$, simplifications et préparation à N08.**

6. De la moyenne vers l'instantané

Propriété (Idée de transition) Le taux de variation mesure une évolution moyenne entre deux points. Lorsque le second point se rapproche du premier sur la courbe, les sécantes se rapprochent d'une droite limite : cette idée prépare la tangente et le nombre dérivé.

Méthode Pour préparer la dérivation, on s'entraîne à :

- calculer $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$;
- simplifier cette expression lorsque c'est possible ;
- observer ce qui se passe lorsque h devient petit ;
- distinguer une moyenne sur un intervalle d'une information instantanée.

Exemple Si une distance est connue seulement entre 0 s et 5 s, on peut calculer une vitesse moyenne. Pour connaître la vitesse à un instant précis, il faudra une idée plus fine : regarder des intervalles de temps de plus en plus courts autour de cet instant.

Vigilance. La tangente et le nombre dérivé ne sont pas encore des automatismes de calcul ici. Dans N07, l'objectif est de comprendre et maîtriser les taux de variation.

⇒ **TD N07 – Partie D : problèmes de synthèse, vitesse moyenne, coût moyen et préparation à l'instantané.**

7. Synthèse

A RETENIR

- L'accroissement de la variable entre a et b est $b - a$.
- L'accroissement de l'image est $f(b) - f(a)$.
- Le taux de variation de f entre a et b est $\tau_f(a; b) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$, avec $a \neq b$.
- Ce taux est le coefficient directeur de la sécante passant par $A(a; f(a))$ et $B(b; f(b))$.
- Un taux positif indique une hausse moyenne ; un taux négatif indique une baisse moyenne.
- L'unité du taux dépend des grandeurs étudiées.
- Pour une fonction affine, le taux de variation est constant.
- L'écriture $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ prépare la notion de nombre dérivé.

APPLICATIONS IMMÉDIATES

1. Calculer le taux de variation de $f(x) = 3x - 2$ entre 1 et 5.
2. Calculer le taux de variation de $g(x) = x^2$ entre 2 et 4.
3. Une distance passe de 12 m à 42 m en 6 s. Calculer la vitesse moyenne.
4. Dire ce que représente graphiquement un taux de variation.
5. Pour $f(x) = x^2$, simplifier $\frac{f(2+h) - f(2)}{h}$, avec $h \neq 0$.
6. Expliquer pourquoi on ne peut pas prendre $h = 0$ dans ce quotient.

BESOIN D'UNE REPRISE ?

À retravailler en priorité :

- calculer une image ;
- former un quotient correctement ;
- lire une pente sur un graphique ;
- distinguer pente moyenne et variation instantanée ;
- simplifier une expression avec h ;
- interpréter une unité : km/h, euros par unité, m/s.

⇒ **TD N07 – Toutes les parties : calculer, lire, interpréter et préparer la dérivation.**