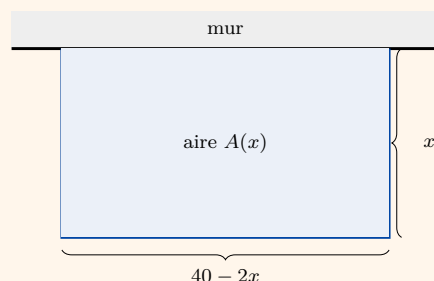


OBJECTIFS

- Résoudre une inéquation du second degré avec un tableau de signes.
- Comparer deux fonctions et interpréter la position de leurs courbes.
- Déterminer un maximum ou un minimum sur un domaine donné.
- Modéliser un problème, valider le domaine et interpréter le résultat.
- Choisir entre formes factorisée, canonique et développée.

ACTIVITE DE DEPART

On dispose de 40 m de grillage pour construire contre un mur un enclos rectangulaire. On note x sa profondeur.



1. Justifier que $0 < x < 20$.
2. Exprimer l'aire $A(x)$.
3. Quelle profondeur semble donner la plus grande aire ?
4. Pour quelles valeurs de x l'aire atteint-elle au moins 150 m^2 ?

1. Du signe d'un trinôme à une inéquation

Définition (Résoudre une inéquation) Résoudre une inéquation, c'est déterminer tous les réels pour lesquels une comparaison est vraie. L'ensemble des solutions est noté $\mathcal{S}$.

Méthode Pour résoudre une inéquation du second degré :

tout ramener dans un membre $\rightarrow$ factoriser ou trouver les racines,

dresser le tableau de signes $\rightarrow$ lire et conclure.

Le symbole de l'inéquation détermine les signes à sélectionner.

Exemple Résolvons $2x^2 - 5x - 3 \leq 0$. Le discriminant vaut

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \times 2 \times (-3) = 49.$$

Les racines sont $-\frac{1}{2}$ et 3, donc

$$2x^2 - 5x - 3 = 2 \left(x + \frac{1}{2} \right) (x - 3).$$

Comme $a = 2 > 0$, le trinôme est négatif entre ses racines.

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	3	$+\infty$	
$2x^2 - 5x - 3$	$+$	0	$-$	0	$+$

L'inégalité est large : les valeurs d'annulation sont conservées. Ainsi,

$$\mathcal{S} = \left[-\frac{1}{2}; 3 \right].$$

Propriété (Lecture des quatre inéquations, avec $a > 0$) Si P possède deux racines $x_1 < x_2$, alors

Inéquation	Ensemble des solutions
$P(x) < 0$	$]x_1; x_2[$
$P(x) \leq 0$	$[x_1; x_2]$
$P(x) > 0$	$] -\infty; x_1[\cup]x_2; +\infty[$
$P(x) \geq 0$	$] -\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty[$

Si $a < 0$, les signes sont inversés. Les cas $\Delta = 0$ et $\Delta < 0$ se lisent directement dans le tableau de signes.

Vigilance. Les crochets dépendent du symbole : une racine appartient à l'ensemble des solutions pour $\leq$ ou $\geq$, mais pas pour $<$ ou $>$. Il faut aussi intersecter avec le domaine imposé par le problème.

⇒ TD N06 – Partie A : résoudre et rédiger des inéquations.

2. Comparer deux fonctions

Propriété (Différence et position relative) Pour deux fonctions f et g définies sur un même domaine,

$$f(x) \leq g(x) \iff f(x) - g(x) \leq 0.$$

Graphiquement, $f(x) \leq g(x)$ signifie que la courbe de f est sous celle de g à l'abscisse x .

Exemple Soient

$$f(x) = x^2 - 4x + 1 \quad \text{et} \quad g(x) = x + 1.$$

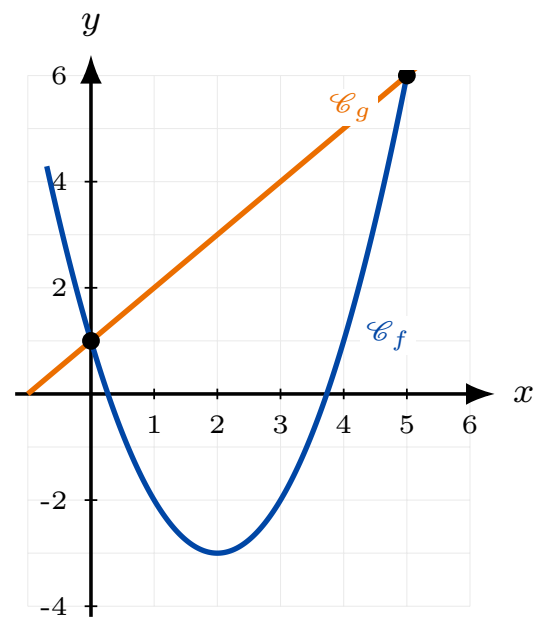
Cherchons quand $\mathcal{C}_f$ est sous $\mathcal{C}_g$:

$$\begin{aligned} f(x) \leq g(x) &\iff x^2 - 4x + 1 \leq x + 1 \\ &\iff x^2 - 5x \leq 0 \\ &\iff x(x - 5) \leq 0. \end{aligned}$$

Le produit est négatif ou nul entre ses racines, donc

$$\mathcal{S} = [0; 5].$$

Les bornes 0 et 5 sont les abscisses d'intersection.



Entre 0 et 5, la parabole bleue est bien située sous la droite orange. Le graphique contrôle le résultat, mais ne remplace pas la preuve algébrique.

Méthode Pour étudier une position relative, on ne compare pas séparément $f(x)$ et $g(x)$: on étudie le signe d'une seule expression,

$$h(x) = f(x) - g(x).$$

Les zéros de h donnent les intersections ; son signe indique quelle courbe est au-dessus.

⇒ TD N06 – Partie B : comparer des fonctions et changer de registre.

3. Optimiser avec la forme canonique

Définition (Maximum et minimum sur un intervalle) Soit f définie sur un intervalle I .

- M est le **maximum** de f sur I si $f(x) \leq M$ pour tout $x \in I$, et si M est atteint.
- m est le **minimum** de f sur I si $f(x) \geq m$ pour tout $x \in I$, et si m est atteint.

Théorème (Extremum d'un trinôme) Pour $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$:

- si $a > 0$, f admet un minimum β , atteint en $x = \alpha$;
- si $a < 0$, f admet un maximum β , atteint en $x = \alpha$.

Sur un domaine restreint, il faut vérifier que α appartient au domaine et comparer, si nécessaire, les valeurs aux bornes.

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	β	$+\infty$

$$a > 0 : \min_{\mathbb{R}} f = \beta.$$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	β	$-\infty$

$$a < 0 : \max_{\mathbb{R}} f = \beta.$$

Méthode Dans un problème d'optimisation :

1. choisir une variable et déterminer son domaine ;
2. exprimer la grandeur à optimiser en fonction de cette variable ;
3. mettre le trinôme sous forme canonique ;
4. lire l'extremum et vérifier qu'il est atteint dans le domaine ;
5. répondre avec une phrase, les unités et les dimensions demandées.

Exemple Pour l'enclos de l'activité,

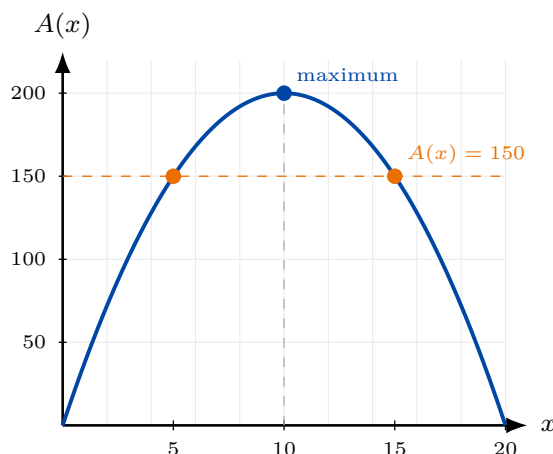
$$A(x) = x(40 - 2x) = -2x^2 + 40x = -2(x - 10)^2 + 200$$

avec $x \in]0; 20[$. Comme $-2 < 0$, l'aire est maximale pour

$$x = 10 \quad \text{et} \quad A(10) = 200.$$

La largeur parallèle au mur vaut alors $40 - 2 \times 10 = 20$.

Conclusion : l'enclos optimal mesure 10 m sur 20 m et son aire maximale est 200 m².



La même courbe permet de lire l'extremum et de résoudre $A(x) \geq 150$. Algébriquement,

$$A(x) - 150 = -2(x - 5)(x - 15),$$

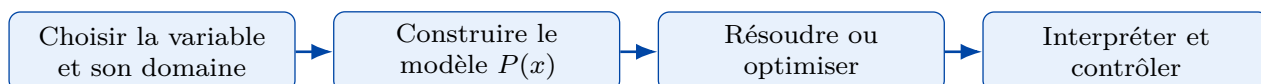
donc, sur $]0; 20[$,

$$x \in [5; 15].$$

Vigilance. Un extremum du trinôme sur $\mathbb{R}$ n'est pas automatiquement la réponse au problème. Le domaine, les unités et le sens physique de la variable font partie de la démonstration.

⇒ TD N06 – Partie C : optimiser sur un domaine et interpréter.

4. Modéliser et valider une réponse



Propriété (Une réponse mathématique n'est pas encore une réponse au problème) Dans un problème contextualisé, une solution n'est retenue que si elle :

- appartient au domaine de la variable ;
- respecte les contraintes de la situation ;
- possède une unité et une interprétation cohérentes ;
- répond exactement à la question posée.

Exemple Une entreprise modélise son bénéfice, en centaines d'euros, par

$$B(x) = -2x^2 + 36x - 112,$$

où $x \in [0; 20]$ désigne le nombre de centaines d'objets vendus.

$$B(x) = -2(x - 4)(x - 14) = -2(x - 9)^2 + 50.$$

- $B(x) \geq 0$ pour $x \in [4; 14]$: l'entreprise est bénéficiaire entre 400 et 1 400 objets vendus.
 - Le bénéfice maximal vaut 50 centaines d'euros, soit 5 000 euros, pour $x = 9$, soit 900 objets.
- Les deux formes répondent à deux questions différentes.

Méthode Dans un même problème, il est souvent efficace de conserver plusieurs formes :

- forme développée : calculs, coefficients, construction du modèle,
- forme factorisée : seuils, signe, domaine de rentabilité,
- forme canonique : extremum et valeur optimale.

⇒ **TD N06 – Partie D : problèmes de synthèse et prise d'initiative.**

5. Prolongement : une condition vraie pour tout réel

Exemple Pour quelles valeurs de m a-t-on

$$x^2 - 2mx + m + 2 \geq 0 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}?$$

Le coefficient dominant est positif. Le trinôme est donc positif ou nul sur $\mathbb{R}$ exactement lorsqu'il possède au plus une racine réelle, c'est-à-dire lorsque $\Delta_m \leq 0$.

$$\begin{aligned} \Delta_m &= (-2m)^2 - 4(m + 2) \\ &= 4(m^2 - m - 2) \\ &= 4(m - 2)(m + 1). \end{aligned}$$

Il faut donc résoudre $(m - 2)(m + 1) \leq 0$, d'où

$$m \in [-1; 2].$$

Démonstration Pour un trinôme $P(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a > 0$,

$$P(x) \geq 0 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R} \iff \Delta \leq 0.$$

En effet, si $\Delta < 0$, le trinôme garde le signe positif de a . Si $\Delta = 0$, il s'annule seulement en sa racine double. Si $\Delta > 0$, il est négatif entre ses deux racines.

6. Synthèse

A RETENIR

- Une inéquation se résout par équivalences, puis par lecture d'un tableau de signes ; la conclusion est un ensemble $\mathcal{S}$.
- Pour comparer f et g , on étudie le signe de $f - g$.
- La forme factorisée donne les seuils et le signe ; la forme canonique donne l'extremum.
- Dans un problème, le domaine doit être fixé avant les calculs.
- Une réponse se valide par les contraintes, les unités et une phrase d'interprétation.
- Un graphique permet de conjecturer et de contrôler ; la preuve reste algébrique.

APPLICATIONS IMMEDIATES

1. Résoudre $(x - 4)(x + 2) \geq 0$.
2. Résoudre $-2x^2 + 8x - 6 > 0$.
3. Déterminer quand $x^2 - 3x \leq x + 5$.
4. Donner l'extremum de $-3(x - 2)^2 + 7$.
5. Optimiser $x(12 - x)$ sur $[0; 12]$.
6. Expliquer pourquoi le domaine précède la résolution.

POUR REPRENDRE LA METHODE Dans le cours N06, revoir d'abord la factorisation et le signe d'un trinôme. Pour chaque exercice de N06, utiliser ensuite la chaîne :

domaine $\longrightarrow$ modèle $\longrightarrow$ forme adaptée $\longrightarrow$ résolution $\longrightarrow$ interprétation.

Les liens actifs de remédiation du cours N06 restent utilisables dans le PDF déposé sur Pronote.

Exemple Bilan : une même expression pour résoudre et optimiser. Un rectangle a un périmètre de 28 cm. On note x la longueur d'un côté ; l'autre mesure $14 - x$, avec $x \in]0; 14[$. Son aire est

$$A(x) = x(14 - x) = -x^2 + 14x.$$

Pour l'optimisation, on utilise la forme canonique :

$$A(x) = -(x - 7)^2 + 49.$$

Ainsi, l'aire maximale vaut 49 cm^2 , atteinte pour un carré de côté 7 cm.

Pour déterminer les rectangles dont l'aire atteint au moins 40 cm^2 , on utilise une forme factorisée :

$$\begin{aligned} A(x) \geq 40 &\iff -x^2 + 14x - 40 \geq 0 \\ &\iff -(x - 4)(x - 10) \geq 0. \end{aligned}$$

Le trinôme est positif ou nul entre ses racines. Après intersection avec le domaine,

$$\mathcal{S} = [4; 10].$$

Les côtés peuvent donc mesurer x et $14 - x$, avec $4 \leq x \leq 10$.

CONTROLE FINAL D'UNE SOLUTION

- Ai-je annoncé la variable et son domaine ?
- Ai-je choisi la forme du trinôme adaptée à la question ?
- Mon tableau de signes ou de variations justifie-t-il la réponse ?
- Ai-je terminé par un ensemble de solutions ou une phrase avec unités ?