

OBJECTIFS

- Choisir la forme d'un trinôme adaptée à la question.
- Interpréter une racine graphiquement et algébriquement.
- Résoudre d'abord sans discriminant lorsque c'est efficace.
- Calculer Δ , déterminer les racines et factoriser.
- Relier racines, signe, factorisation et position de la parabole.

ACTIVITE DE DEPART

On considère trois écritures d'une même fonction :

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^2 - 4x - 6, \\ f(x) &= 2(x-1)^2 - 8, \\ f(x) &= 2(x+1)(x-3). \end{aligned}$$

1. Quelle écriture donne immédiatement $f(0)$?
2. Laquelle donne le sommet ?
3. Laquelle permet de résoudre $f(x) = 0$?
4. Sans calculer, prévoir le signe de $f(2)$.

1. Trois formes, trois lectures

Définition (Racine d'un trinôme) Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$. Un réel r est une **racine** de P lorsque

$$P(r) = 0.$$

Graphiquement, les racines sont les abscisses des points où la parabole coupe ou touche l'axe des abscisses.

Forme	Écriture	Lecture privilégiée
développée	$ax^2 + bx + c$	coefficients, image en 0, Δ
canonique	$a(x - \alpha)^2 + \beta$	sommet, axe, extremum, variations
factorisée	$a(x - x_1)(x - x_2)$	racines, équation, signe

Une même fonction, trois lectures. La forme développée fait apparaître a, b, c , la forme canonique le sommet, et la forme factorisée les racines.

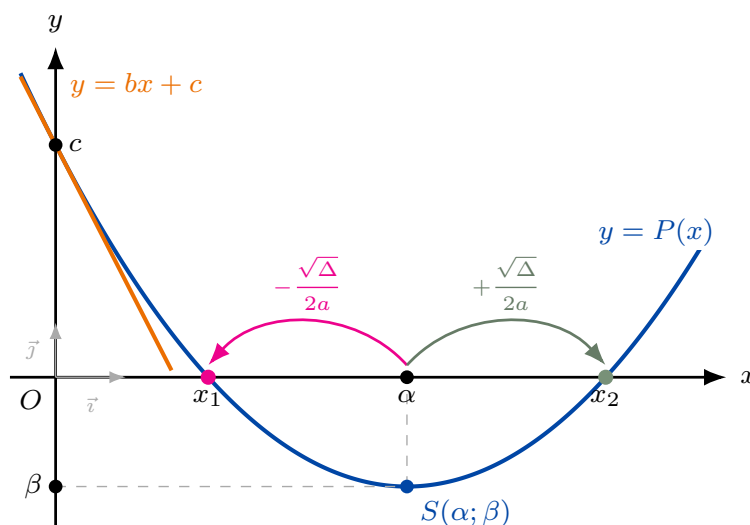


Figure-bilan pour $a > 0$ et $\Delta > 0$. La droite $y = bx + c$ est tangente à la parabole au point d'abscisse 0. Les racines sont symétriques par rapport à $x = \alpha$.

Propriété (Forme factorisée et racines) Si $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$, alors x_1 et x_2 sont les racines de P . Réciproquement, si P possède deux racines réelles x_1 et x_2 , alors

$$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Exemple Pour $P(x) = 2(x + 1)(x - 3)$, les racines sont -1 et 3 . En effet,

$$P(x) = 0 \iff 2(x + 1)(x - 3) = 0 \iff x = -1 \text{ ou } x = 3.$$

Vigilance. Une expression comme $x^2 - 3x - 5$ n'est pas une fonction. On écrit la fonction $x \mapsto x^2 - 3x - 5$, ou bien on définit f par $f(x) = x^2 - 3x - 5$.

2. Résoudre avant de calculer un discriminant

Méthode Avant toute formule générale, chercher dans cet ordre :

1. un facteur commun ou une identité remarquable ;
2. une équation du type $X^2 = k$ issue d'une forme canonique ;
3. une racine évidente, puis la somme ou le produit des racines ;
4. seulement ensuite, le discriminant.

Exemple Facteur commun

$$\begin{aligned} 3x^2 - 12x = 0 &\iff 3x(x - 4) = 0 \\ &\iff x = 0 \text{ ou } x = 4. \end{aligned}$$

Exemple Identité remarquable

$$\begin{aligned} 4x^2 - 25 = 0 &\iff (2x - 5)(2x + 5) = 0 \\ &\iff x = \frac{5}{2} \text{ ou } x = -\frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Exemple Forme canonique

$$(x - 3)^2 - 7 = 0 \iff (x - 3)^2 = 7 \iff x = 3 \pm \sqrt{7}.$$

Exemple Racine évidente Pour $P(x) = 3x^2 + 7x - 10$, on teste d'abord les valeurs simples ± 1 et ± 2 .
Or

$$P(1) = 3 + 7 - 10 = 0.$$

Ainsi, $x_1 = 1$ est une racine et $x - 1$ est un facteur de $P(x)$. On obtient

$$3x^2 + 7x - 10 = (x - 1)(3x + 10).$$

La seconde racine vérifie $3x + 10 = 0$, donc

$$x_2 = -\frac{10}{3}.$$

Propriété (Somme et produit des racines) Si le trinôme

$$x^2 - sx + p$$

possède deux racines x_1 et x_2 , alors

$$\boxed{x_1 + x_2 = s} \quad \text{et} \quad \boxed{x_1 x_2 = p}.$$

Réciproquement, deux nombres de somme s et de produit p sont les racines de $x^2 - sx + p$.

Exemple Pour résoudre

$$x^2 - 16x + 55 = 0,$$

on cherche deux nombres dont la somme vaut 16 et le produit 55. Ce sont 5 et 11. Ainsi,

$$x^2 - 16x + 55 = (x - 5)(x - 11),$$

donc

$$\boxed{\mathcal{S} = \{5; 11\}}.$$

Démonstration En développant,

$$(x - x_1)(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2.$$

L'identification avec $x^2 - sx + p$ donne les deux égalités. Plus généralement, pour $ax^2 + bx + c$,

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

$\Rightarrow$ TD N06 – Partie B : résoudre avec la méthode la plus courte.

3. Le discriminant : une méthode générale

Théorème (Discriminant et nombre de racines) Pour $P(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$, on appelle **discriminant** le réel

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

— Si $\Delta > 0$, P possède deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

— Si $\Delta = 0$, P possède une racine réelle double :

$$x_0 = -\frac{b}{2a}.$$

— Si $\Delta < 0$, P ne possède aucune racine réelle.

Démonstration La forme canonique générale s'écrit

$$P(x) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a}.$$

Résoudre $P(x) = 0$ revient donc à écrire

$$\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}.$$

Le membre de gauche étant un carré, le signe de Δ détermine exactement le nombre de solutions réelles.

Méthode Pour résoudre $ax^2 + bx + c = 0$ par le discriminant :

$$\boxed{\text{identifier } a, b, c} \longrightarrow \boxed{\text{calculer } \Delta} \longrightarrow \boxed{\text{annoncer le cas}} \longrightarrow \boxed{\text{calculer et conclure}}.$$

Exemple Résolvons $2x^2 - 5x - 3 = 0$. Ici $a = 2$, $b = -5$, $c = -3$, donc

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \times 2 \times (-3) = 49.$$

Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions :

$$x_1 = \frac{5 - 7}{4} = -\frac{1}{2}, \quad x_2 = \frac{5 + 7}{4} = 3.$$

Ainsi, $\mathcal{S} = \left\{ -\frac{1}{2}; 3 \right\}$.

Vigilance. Dans $\Delta = b^2 - 4ac$, le coefficient b doit être pris avec son signe. Si $b = -5$, alors $b^2 = (-5)^2 = 25$.

⇒ TD N06 – Partie C : discriminant, factorisation et contrôle graphique.

4. Factorisation et signe du trinôme

Propriété (Factorisation selon le discriminant) Pour $P(x) = ax^2 + bx + c$:

- si $\Delta > 0$, alors $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$;
- si $\Delta = 0$, alors $P(x) = a(x - x_0)^2$;
- si $\Delta < 0$, P n'est pas factorisable en produit de facteurs du premier degré dans $\mathbb{R}$.

Théorème (Signe d'un trinôme)

- Avec deux racines $x_1 < x_2$, P est du signe de a à l'extérieur des racines et du signe opposé entre elles.
- Avec une racine double x_0 , P est du signe de a , et s'annule seulement en x_0 .
- Sans racine réelle, P garde le signe de a sur $\mathbb{R}$.

Exemple Pour $P(x) = 2(x+1)(x-3)$, $a = 2 > 0$ et les racines sont -1 et 3 .

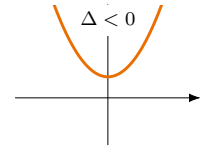
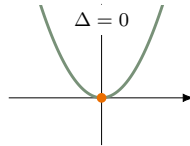
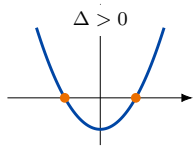
x	$-\infty$	-1		3	$+\infty$
$P(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Exemple Pour $Q(x) = -3(x-2)^2$, la racine double est 2 et $a = -3 < 0$.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$Q(x)$	$-$	0	$-$

Vigilance. Le signe « à l'extérieur / à l'intérieur » ne se mémorise pas seul : il dépend du signe de a . La factorisation permet toujours de retrouver le tableau par la règle des signes.

5. Interprétation graphique et cohérence



Propriété (Lien entre sommet et discriminant) Si $P(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$, alors

$$\boxed{\beta = -\frac{\Delta}{4a}} \quad \text{ou encore} \quad \boxed{\Delta = -4a\beta}.$$

Le signe de Δ indique donc la position du sommet relativement à l'axe des abscisses, en tenant compte de l'orientation donnée par a .

Méthode Un résultat algébrique doit rester cohérent avec la parabole :

- deux racines $\iff$ deux intersections avec l'axe ;
- une racine double $\iff$ le sommet est sur l'axe ;
- aucune racine $\iff$ la parabole reste d'un même côté de l'axe.

$\Rightarrow$ TD N06 – Partie D : problèmes, changements de registre et choix de méthode.

6. Synthèse

A RETENIR

- La bonne forme dépend de la question : développée pour les coefficients, canonique pour le sommet, factorisée pour les racines et le signe.
- Une racine r vérifie $P(r) = 0$.
- Avant Δ , chercher une factorisation, une identité remarquable, une forme canonique ou une racine évidente.
- Le signe de Δ donne le nombre de racines réelles.
- Avec deux racines, le trinôme est du signe de a à l'extérieur et du signe opposé entre les racines.
- Toute résolution doit se terminer par un ensemble de solutions.

APPLICATIONS IMMÉDIATES

- Donner les racines de $x \mapsto 3(x-2)(x+5)$.
- Résoudre sans Δ : $5x^2 - 15x = 0$.
- Calculer le discriminant de $2x^2 + x + 4$.
- Factoriser $x^2 - 5x + 6$.
- Donner le signe de $-2(x-1)(x+4)$ sur $]1; +\infty[$.
- Expliquer graphiquement le cas $\Delta = 0$.

BESOIN D'UNE REPRISE EN VIDEO ? Cliquer sur la difficulté rencontrée.

- Résoudre une équation du second degré.
- Factoriser un trinôme.
- Résoudre sans discriminant.
- Somme, produit et racine évidente.
- Signe d'un trinôme.
- Page complète « Équation du second degré ».