

OBJECTIFS

- reconnaître la fonction carré et sa courbe ;
- comprendre une parabole comme transformation de la courbe de $x \mapsto x^2$;
- lire le sommet, l'axe de symétrie et le sens d'ouverture ;
- exploiter une forme canonique $a(x - \alpha)^2 + \beta$;
- déterminer une forme canonique dans des cas simples.

ACTIVITÉ DE DÉPART

On compare les trois fonctions :

$$f(x) = x^2,$$

$$g(x) = (x - 2)^2 + 1,$$

$$h(x) = -2(x + 1)^2 + 3.$$

1. Quelle courbe reconnaît-on pour f ?
2. Comment la courbe de g semble-t-elle obtenue à partir de celle de f ?
3. Quel rôle jouent les nombres 2, -1 et 3 dans l'expression de h ?

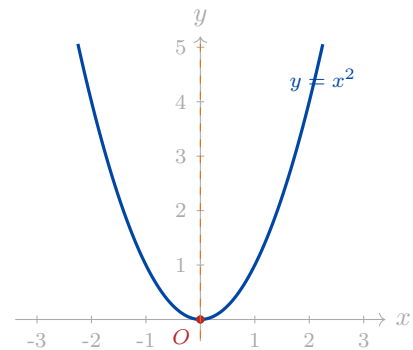
On veut relier une expression algébrique à une parabole.

1. La fonction carré

Définition (Fonction carré) La fonction carré est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^2.$$

Sa courbe représentative est une parabole de sommet $O(0; 0)$, symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.



Propriété (Symétrie et signe) Pour tout réel x , on a

$$(-x)^2 = x^2 \quad \text{et} \quad x^2 \geq 0.$$

La fonction carré admet un minimum égal à 0, atteint pour $x = 0$.

Propriété (Variations de la fonction carré) La fonction carré est décroissante sur $] -\infty; 0]$, puis croissante sur $[0; +\infty[$.

Méthode Pour reconnaître la fonction carré, on repère une parabole tournée vers le haut, un sommet à l'origine et une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.

Exemple On a

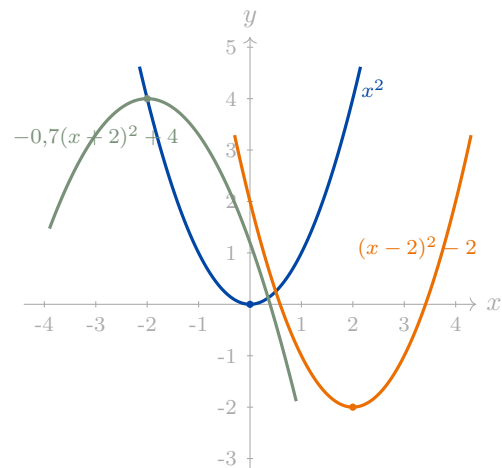
$$f(-2) = 4, \quad f(-1) = 1, \quad f(0) = 0, \quad f(1) = 1, \quad f(2) = 4.$$

Les nombres -2 et 2 ont la même image : cela traduit la symétrie de la courbe.

Vigilance. Une parabole n'est pas une droite : les accroissements des images ne sont pas constants.

⇒ **TD N05 – Partie A : fonction carré, symétrie et lectures graphiques.**

2. Transformer une parabole



Définition (Parabole transformée) Une fonction de la forme

$$x \mapsto a(x - \alpha)^2 + \beta \quad \text{avec } a \neq 0$$

a pour courbe une parabole obtenue à partir de la courbe de $x \mapsto x^2$ par déplacement, étirement ou retournement.

Propriété (Rôle des paramètres) Pour la fonction $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$:

- $S(\alpha; \beta)$ est le sommet de la parabole ;
- la droite $x = \alpha$ est l'axe de symétrie ;
- si $a > 0$, la parabole est tournée vers le haut ;
- si $a < 0$, la parabole est tournée vers le bas.

Méthode Dans une expression de la forme $a(x - \alpha)^2 + \beta$, on lit d'abord les transformations : déplacement horizontal de α , déplacement vertical de β , puis orientation et ouverture données par a .

Exemple La fonction

$$g(x) = (x - 1)^2 + 1$$

a pour sommet $S(1; 1)$, pour axe de symétrie la droite d'équation $x = 1$, et sa parabole est tournée vers le haut.

Vigilance. Dans $(x - \alpha)^2$, le nombre visible n'est pas toujours α . L'expression $(x + 4)^2$ s'écrit $(x - (-4))^2$.

⇒ TD N05 – Partie B : formes canoniques, sommets et axes de symétrie.

3. Forme canonique

Définition (Fonction polynôme du second degré) Une fonction polynôme du second degré est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

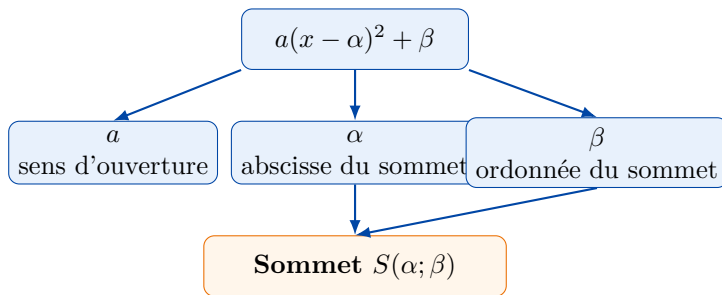
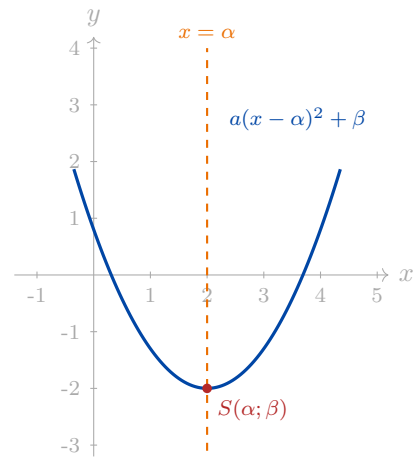
$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

où a, b, c sont des réels et $a \neq 0$.

Définition (Forme canonique) Toute fonction polynôme du second degré peut s'écrire sous la forme

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta.$$

Cette écriture s'appelle la forme canonique.



Propriété (Sommet, axe et extremum) Si

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta,$$

alors la parabole a pour sommet $S(\alpha; \beta)$ et pour axe de symétrie la droite d'équation $x = \alpha$.
Si $a > 0$, f admet un minimum égal à β . Si $a < 0$, f admet un maximum égal à β .

x	$-\infty$	3	$+\infty$
f			

Méthode Pour étudier $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$, on repère a , α , β , puis on donne :

- le sommet ;
- l'axe de symétrie ;
- l'extremum ;
- le sens de variation.

Exemple Soit

$$f(x) = 2(x - 3)^2 - 5.$$

Alors $a = 2$, $\alpha = 3$, $\beta = -5$. Le sommet est $S(3; -5)$, l'axe est $x = 3$, et f admet un minimum égal à -5 .

Vigilance. La forme développée $ax^2 + bx + c$ est pratique pour calculer certaines images ou reconnaître les coefficients. La forme canonique est la forme adaptée pour lire le sommet et l'extremum.

⇒ **TD N05 – Parties B et C : choisir la bonne lecture, corriger les erreurs de signe.**

4. Choisir une forme

Propriété (Forme adaptée) Une même fonction du second degré peut avoir plusieurs écritures.

- La forme développée facilite le calcul d'images et la lecture des coefficients.
- La forme canonique facilite la lecture du sommet, de l'axe et de l'extremum.
- La forme factorisée, lorsqu'elle existe, facilite la lecture des zéros.

Question posée	Forme utile
Calculer une image	développée ou canonique, selon le calcul le plus court
Lire le sommet	canonique
Trouver un extremum	canonique
Lire des zéros	factorisée ou graphique
Construire une parabole	canonique ou graphique

Méthode Pour résoudre un problème avec une parabole, commencer par identifier ce que l'on cherche :

- une image : on calcule avec l'expression la plus simple ;
- un sommet ou un extremum : on cherche la forme canonique ;
- une lecture graphique : on repère sommet, axe, sens d'ouverture ;
- une équation $f(x) = 0$: on cherche une forme factorisée si elle est disponible.

Exemple La fonction

$$f(x) = 2(x - 4)^2 - 5$$

admet un minimum égal à -5 , atteint pour $x = 4$. Sa courbe a pour sommet $S(4; -5)$, pour axe de symétrie $x = 4$, et elle est tournée vers le haut.

Vigilance. Le discriminant n'est pas encore nécessaire ici : avant toute méthode générale, on apprend à reconnaître la forme utile.

⇒ TD N05 – Partie D : synthèse, choix de forme et premières situations.

5. Obtenir une forme canonique dans des cas simples

Propriété (Complétion du carré) Pour tout réel x et tout réel p ,

$$x^2 + 2px = (x + p)^2 - p^2.$$

Cette identité permet de transformer certaines écritures développées en formes canoniques.

Méthode Pour transformer une expression du type $x^2 + bx + c$, on utilise l'identité

$$(x + p)^2 = x^2 + 2px + p^2.$$

On fait apparaître le carré qui possède le même terme en x , puis on ajuste la constante.

Exemple Mettons $x^2 + 6x + 5$ sous forme canonique.

$$x^2 + 6x + 5 = (x + 3)^2 - 9 + 5 = (x + 3)^2 - 4.$$

La parabole a donc pour sommet $S(-3; -4)$, pour axe $x = -3$, et elle admet un minimum égal à -4 .

Méthode Quand le coefficient de x^2 n'est pas 1, on peut d'abord factoriser ce coefficient dans les deux premiers termes.

Exemple Mettons $2x^2 - 8x + 1$ sous forme canonique.

$$\begin{aligned} 2x^2 - 8x + 1 &= 2(x^2 - 4x) + 1 \\ &= 2((x - 2)^2 - 4) + 1 \\ &= 2(x - 2)^2 - 8 + 1 \\ &= 2(x - 2)^2 - 7. \end{aligned}$$

Le sommet est donc $S(2; -7)$.

Propriété (Formule utile) Pour $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$, l'abscisse du sommet est

$$\alpha = -\frac{b}{2a},$$

puis $\beta = f(\alpha)$.

Vigilance. La formule donne l'abscisse du sommet. Elle ne remplace pas la compréhension : il faut encore interpréter le signe de a , donner l'axe, l'extremum et conclure clairement.

⇒ **TD N05 – Partie C : obtenir une forme canonique et choisir la forme adaptée.**

6. Synthèse

A RETENIR

- La courbe d'une fonction du second degré est une parabole.
- La forme canonique $a(x - \alpha)^2 + \beta$ permet de lire le sommet $S(\alpha; \beta)$.
- L'axe de symétrie est la droite $x = \alpha$.
- Si $a > 0$, la fonction admet un minimum ; si $a < 0$, elle admet un maximum.
- La forme canonique est particulièrement utile pour lire un extremum, construire une courbe ou résoudre certains problèmes.
- Compléter le carré permet d'obtenir une forme canonique dans des cas simples.

APPLICATIONS IMMÉDIATES

1. Donner le sommet et l'axe de

$$f(x) = (x - 4)^2 + 1.$$

2. Donner l'extremum de

$$g(x) = -3(x + 2)^2 + 5.$$

3. Compléter : si $h(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ et $a > 0$, alors h admet un égal à
4. Développer $(x - 2)^2 - 7$.
5. Écrire $x^2 - 10x + 8$ sous forme canonique.
6. Expliquer pourquoi $(x + 1)^2 - 3$ n'a pas pour sommet $(1; -3)$.

BESOIN D'UNE REPRISE ?

À retravailler en priorité :

- fonction carré ;
- lecture graphique d'une parabole ;
- rôle de a , α et β ;
- développement d'un carré ;
- identité $x^2 + 2px = (x + p)^2 - p^2$.

⇒ **TD N05 – Partie D : problèmes de synthèse, modélisation et optimisation.**