

OBJECTIFS

- Placer un point et lire ses coordonnées dans un repère.
- Calculer les coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$.
- Effectuer des calculs vectoriels simples.
- Reconnaître des vecteurs égaux, opposés ou colinéaires.
- Utiliser les vecteurs pour étudier une configuration.

ACTIVITÉ DE DÉPART

Dans un repère, on donne :

$$A(-1; 1), \quad B(3; 2), \quad C(1; 4).$$

1. Placer les trois points.
 2. Que faut-il calculer pour construire le point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme ?
 3. Comment vérifier ce résultat par le calcul ?
- On veut passer de la figure aux coordonnées, puis des coordonnées à la figure.

1. Points et coordonnées

Définition (Repère du plan) Un repère du plan permet de repérer chaque point par un couple de nombres. Si A a pour abscisse x_A et pour ordonnée y_A , on écrit

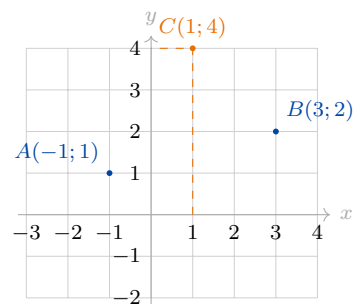
$$A(x_A; y_A).$$

Méthode Pour placer $A(x_A; y_A)$, on part de l'origine, on se déplace horizontalement selon x_A , puis verticalement selon y_A . L'abscisse se lit sur l'axe horizontal ; l'ordonnée se lit sur l'axe vertical.

Exemple Le point $A(-1; 1)$ est placé une unité à gauche de l'origine et une unité au-dessus de l'axe des abscisses.

Vigilance. Dans $A(x_A; y_A)$, l'ordre compte : on écrit toujours d'abord l'abscisse, puis l'ordonnée.

⇒ TD N04 – Partie A : placer des points, lire des coordonnées.

**2. Coordonnées d'un vecteur**

Définition (Vecteur) Un vecteur décrit un déplacement. Il possède une direction, un sens et une longueur. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ correspond au déplacement du point A vers le point B .

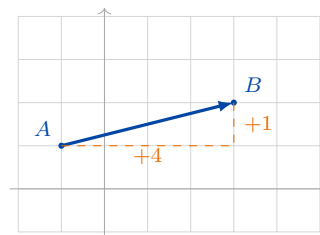
Propriété (Coordonnées de $\overrightarrow{AB}$) Si $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$, alors

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}.$$

Exemple Avec $A(-1; 1)$ et $B(3; 2)$,

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 - (-1) \\ 2 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Méthode Pour calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$, on fait toujours coordonnées de l'arrivée moins coordonnées du départ.



Vigilance. Inverser le départ et l'arrivée change le signe : $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

⇒ TD N04 – Partie B : calculer des coordonnées de vecteurs.

3. Calcul vectoriel

Définition (Vecteurs égaux et vecteur opposé)

Deux vecteurs sont égaux s'ils ont les mêmes coordonnées. Le vecteur opposé de $\vec{u}$ est $-\vec{u}$: il a la même direction et la même longueur, mais le sens contraire.

Propriété (Calculs en coordonnées) Si $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, alors

$$\vec{u} + \vec{v} \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}, \quad k\vec{u} \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}.$$

Propriété (Parallélogramme) Un quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si

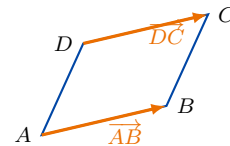
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}.$$

On peut aussi utiliser $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

Méthode Pour construire $\vec{u} + \vec{v}$, on enchaîne les deux déplacements. Pour calculer, on additionne séparément les abscisses et les ordonnées.

Exemple Si $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$, alors

$$\vec{u} + \vec{v} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad 2\vec{u} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$



Vigilance. Dans un parallélogramme $ABCD$, l'ordre des lettres est important. La relation $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ respecte le même sens de parcours.

⇒ TD N04 – Partie C : calcul vectoriel et parallélogrammes.

4. Colinéarité et alignement

Définition (Vecteurs colinéaires) Deux vecteurs non nuls sont colinéaires lorsqu'ils ont la même direction. Autrement dit, l'un est un multiple de l'autre.

Propriété (Critère de colinéarité) Soient $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si

$$xy' - yx' = 0.$$

Méthode Pour montrer que trois points A, B, C sont alignés, on calcule les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, puis on vérifie si ces deux vecteurs sont colinéaires.

Exemple Soient $A(1;2)$, $B(4;8)$ et $C(-1;-2)$. On a $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$. Or $3 \times (-4) - 6 \times (-2) = -12 + 12 = 0$. Les vecteurs sont colinéaires, donc les points A, B et C sont alignés.

Vigilance. Deux vecteurs colinéaires ne sont pas forcément égaux. Ils ont la même direction, mais pas nécessairement la même longueur ni le même sens.

⇒ TD N04 – Partie D : colinéarité, alignement et configurations.

5. Synthèse

À RETENIR

- Un point se repère par ses coordonnées $A(x_A; y_A)$.
- $\overrightarrow{AB}$ se calcule en faisant arrivée moins départ :

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}.$$

- Deux vecteurs sont égaux s'ils ont les mêmes coordonnées.
- Deux vecteurs sont colinéaires lorsque l'un est un multiple de l'autre.
- Pour montrer un alignement, on utilise la colinéarité de deux vecteurs.

APPLICATIONS IMMÉDIATES

1. Placer $A(-2; 1)$, $B(3; -1)$ et $C(1; 4)$.
2. Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$.
3. Si $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, calculer $3\vec{u}$.
4. Calculer $\vec{u} + \vec{v}$ avec $\vec{v} \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}$.
5. Tester la colinéarité de $\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.
6. Expliquer comment vérifier qu'un quadrilatère est un parallélogramme avec des vecteurs.

BESOIN D'UNE REPRISE ?

À retravailler en priorité : lecture de coordonnées, calcul de $\overrightarrow{AB}$, signe des coordonnées, somme de vecteurs, critère de colinéarité et rédaction d'un alignement.