

**OBJECTIFS**

- développer, réduire et factoriser une expression algébrique ;
- utiliser les identités remarquables dans les deux sens ;
- choisir une forme adaptée à la question posée ;
- résoudre des équations et inéquations simples dans  $\mathbb{R}$  ;
- conclure par un ensemble de solutions.

**ACTIVITE DE DEPART**

On considère les trois expressions :

$$A(x) = (x - 3)(x + 2), \quad B(x) = x^2 - x - 6, \\ C(x) = (x - 1)^2 - 7.$$

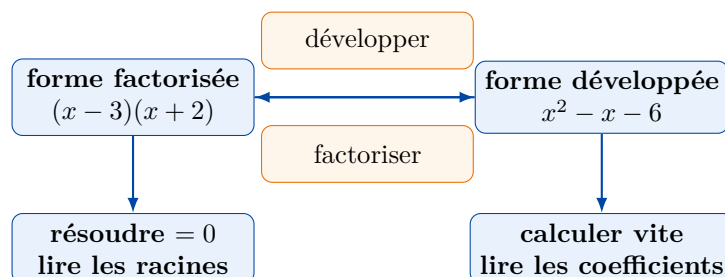
1. Calculer  $A(0)$ ,  $B(0)$  et  $C(0)$ .
2. Vérifier que ces trois expressions donnent le même résultat pour  $x = 4$ .
3. Quelle forme permet de résoudre rapidement  $A(x) = 0$  ?
4. Quelle forme permet de connaître le coefficient de  $x^2$  ?

**Idée-clé :** une même expression peut avoir plusieurs écritures. Le choix de l'écriture dépend de la question.

## 1. Transformer une expression

**Définition (Expression algébrique)** Une expression algébrique est une formule contenant des nombres, des lettres et des opérations. Lorsqu'une lettre représente un nombre variable, l'expression peut prendre différentes valeurs.

**Définition (Expressions égales)** Deux expressions sont égales lorsqu'elles donnent le même résultat pour toutes les valeurs de la variable pour lesquelles elles sont définies.



**Propriété (Distributivité)** Pour tous réels  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $d$ , on a :

$$a(b + c) = ab + ac \quad \text{et} \quad (a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd.$$

Développer, c'est transformer un produit en somme. Factoriser, c'est transformer une somme en produit.

**Propriété (Identités remarquables)** Pour tous réels  $a$  et  $b$ , on a :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \quad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2, \quad (a + b)(a - b) = a^2 - b^2.$$

Ces identités s'utilisent dans les deux sens.

**Méthode** Pour transformer une expression, on commence par identifier sa structure :

- un produit de deux facteurs se développe avec la distributivité ;
- un carré d'une somme ou d'une différence se développe avec une identité remarquable ;
- un facteur commun permet de factoriser ;
- une différence de deux carrés se factorise avec  $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ .

**Exemple** Développons et réduisons  $E(x) = (2x - 3)(x + 5)$ .

$$E(x) = 2x^2 + 10x - 3x - 15 = 2x^2 + 7x - 15.$$

Factorisons  $F(x) = 9x^2 - 25$ . On reconnaît une différence de deux carrés :

$$9x^2 - 25 = (3x)^2 - 5^2 = (3x - 5)(3x + 5).$$

**Vigilance.** On ne développe pas automatiquement. Pour résoudre une équation produit, la forme factorisée est souvent plus efficace que la forme développée.

**À travailler dans le TD.** TD N02 – Partie A : développer, réduire, reconnaître une identité remarquable.

## 2. Choisir une forme adaptée

**Définition (Forme développée et forme factorisée)** Une forme développée est une écriture sous forme de somme de termes. Une forme factorisée est une écriture sous forme de produit de facteurs.

| Question posée                       | Forme souvent la plus adaptée              |
|--------------------------------------|--------------------------------------------|
| Calculer une image                   | la forme qui donne le calcul le plus court |
| Résoudre une équation produit nul    | forme factorisée                           |
| Lire un coefficient dominant         | forme développée                           |
| Étudier un signe simple              | forme factorisée ou expression affine      |
| Reconnaître une identité remarquable | forme carrée ou différence de carrés       |

**Méthode** Avant de calculer, on se demande : « quelle forme sert la question ? » Un calcul algébrique réussi n'est pas seulement un calcul exact : c'est aussi un choix efficace de représentation.

**Exemple** Soit  $G(x) = (x - 4)^2 - 9$ .

Pour calculer  $G(4)$ , la forme donnée est très efficace :

$$G(4) = (4 - 4)^2 - 9 = -9.$$

Pour résoudre  $G(x) = 0$ , on factorise :

$$G(x) = (x - 4)^2 - 3^2 = (x - 7)(x - 1).$$

La forme factorisée permet ensuite d'utiliser la propriété du produit nul.

**Vigilance.** Deux expressions peuvent être égales sans avoir la même apparence. Pour montrer qu'elles sont égales, on transforme l'une des deux ou les deux jusqu'à obtenir une même écriture.

**À travailler dans le TD.** TD N02 – Partie B : choisir la forme adaptée selon l'objectif.

## 3. Résoudre une équation

**Définition (Équation et solution)** Une équation est une égalité contenant une inconnue. Résoudre une équation dans  $\mathbb{R}$ , c'est déterminer tous les réels qui rendent l'égalité vraie. L'ensemble des solutions est noté  $\mathcal{S}$ .

**Propriété (Produit nul)** Un produit est nul si et seulement si au moins l'un de ses facteurs est nul :

$$AB = 0 \iff A = 0 \quad \text{ou} \quad B = 0.$$

**Méthode** Pour résoudre une équation, on effectue des transformations équivalentes. On écrit explicitement l'opération effectuée lorsque c'est utile, puis on conclut par l'ensemble des solutions.

**Exemple** Résolvons dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $4x - 7 = 2x + 5$ .

On soustrait  $2x$  aux deux membres, puis on ajoute 7 aux deux membres :

$$4x - 7 = 2x + 5 \iff 2x - 7 = 5 \iff 2x = 12 \iff x = 6.$$

Ainsi,  $\mathcal{S} = \{6\}$ .

**Exemple** Résolvons dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $(x - 7)(x - 1) = 0$ .

D'après la propriété du produit nul :

$$(x - 7)(x - 1) = 0 \iff x - 7 = 0 \quad \text{ou} \quad x - 1 = 0 \iff x = 7 \quad \text{ou} \quad x = 1.$$

Ainsi,  $\mathcal{S} = \{1; 7\}$ .

**Propriété (Quotient nul)** Un quotient est nul si et seulement si son numérateur est nul et son dénominateur non nul :

$$\frac{A}{B} = 0 \iff A = 0 \quad \text{et} \quad B \neq 0.$$

**Vigilance.** On ne divise jamais par une expression sans s'assurer qu'elle n'est pas nulle. Par exemple, diviser par  $x - 2$  peut faire perdre la solution  $x = 2$ .

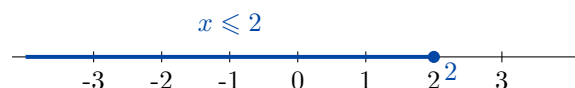
**À travailler dans le TD.** TD N02 – Partie C : résoudre par équivalences, produit nul, quotient nul.

## 4. Résoudre une inéquation simple

**Définition (Inéquation)** Une inéquation est une inégalité contenant une inconnue. Résoudre une inéquation dans  $\mathbb{R}$ , c'est déterminer tous les réels qui rendent l'inégalité vraie.

**Propriété (Multiplier ou diviser une inégalité)** On peut ajouter ou soustraire un même nombre aux deux membres d'une inégalité sans changer son sens.

Si on multiplie ou divise les deux membres par un nombre strictement positif, le sens de l'inégalité ne change pas. Si on multiplie ou divise par un nombre strictement négatif, le sens de l'inégalité change.



**Méthode** Pour résoudre une inéquation du premier degré :

- on isole l'inconnue par transformations équivalentes ;
- on change le sens de l'inégalité si l'on divise par un nombre négatif ;
- on donne l'ensemble des solutions sous forme d'intervalle ;
- on peut contrôler le résultat sur une droite graduée.

**Exemple** Résolvons dans  $\mathbb{R}$  l'inéquation  $-3x + 6 < 15$ .

On soustrait 6, puis on divise par  $-3 < 0$ , ce qui change le sens de l'inégalité :

$$-3x + 6 < 15 \iff -3x < 9 \iff x > -3.$$

Ainsi,  $\mathcal{S} = ] - 3; +\infty[$ .

**Exemple** Résolvons dans  $\mathbb{R}$  l'inéquation  $5x - 4 \leq 2x + 8$ .

$$5x - 4 \leq 2x + 8 \iff 3x - 4 \leq 8 \iff 3x \leq 12 \iff x \leq 4.$$

Ainsi,  $\mathcal{S} = ] - \infty; 4]$ .

**Vigilance.** Le sens d'une inégalité change seulement lorsqu'on multiplie ou divise par un nombre négatif. Il ne change pas lorsqu'on ajoute ou soustrait un même nombre aux deux membres.

## 5. Synthèse

### A RETENIR

- Développer transforme un produit en somme ; factoriser transforme une somme en produit.
- Les identités remarquables s'utilisent dans les deux sens.
- Une forme n'est pas meilleure en soi : elle est adaptée ou non à une question.
- Une équation ou une inéquation se résout par transformations équivalentes.
- Un produit est nul si et seulement si au moins l'un de ses facteurs est nul.
- Dans une inéquation, diviser ou multiplier par un nombre négatif change le sens de l'inégalité.
- Une résolution se termine par un ensemble de solutions  $\mathcal{S}$ .

### APPLICATIONS IMMEDIATES

1. Développer et réduire :  $(x + 4)(x - 3)$ .
2. Factoriser :  $x^2 - 16$ .
3. Compléter :  $(2x - 5)^2 = \dots\dots\dots$
4. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  :  $7x - 4 = 3x + 12$ .
5. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  :  $(x + 6)(x - 2) = 0$ .
6. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  :  $-2x + 5 \geq 13$ .
7. Choisir une forme adaptée de  $H(x) = (x - 1)^2 - 25$  pour résoudre  $H(x) = 0$ , puis résoudre.

**Pour réviser efficacement.** Reprendre trois réflexes : reconnaître une identité remarquable, choisir entre développer et factoriser, conclure chaque équation ou inéquation par  $\mathcal{S} = \dots$ .