

Corrigé détaillé — TD N21

Fonction exponentielle II : modélisations et algorithmes

Ce corrigé est rédigé pour une lecture autonome (diffusion numérique) : chaque énoncé est rappelé intégralement avant sa correction, et chaque étape du raisonnement est détaillée.

Propriété utilisée Sans réciproque de la fonction exponentielle en Première, une valeur de k telle que $e^k \approx q$ (pour $q > 0$ donné) ne peut jamais s'obtenir en « isolant k » par un calcul formel. Elle s'obtient uniquement par *balayage* : on teste plusieurs valeurs de k dans un tableau, ou on affine à la calculatrice, jusqu'à obtenir une valeur approchée suffisamment précise de e^k .

Méthode Pour déterminer, par balayage, le temps t auquel une fonction $f(t) = u_0 e^{kt}$ atteint un seuil S : on écrit un algorithme qui part de $t = 0$, avance t d'un petit pas choisi, et répète cette avancée tant que $f(t)$ n'a pas atteint S (boucle **tant que**). La condition de la boucle doit exprimer que le seuil n'est *pas encore* atteint : pour une grandeur croissante, on répète tant que $f(t) < S$; pour une grandeur décroissante, tant que $f(t) > S$.

A — Réactivation

Exercice 1

Énoncé Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $q = 1,2$.

1. Calculer u_1, u_2, u_3 .
2. Donner l'expression de u_n en fonction de n .

Une suite géométrique se construit en multipliant chaque terme par la raison pour obtenir le suivant.

1. On calcule successivement :

$$u_1 = u_0 \times q = 5 \times 1,2 = 6, \quad u_2 = u_1 \times q = 6 \times 1,2 = 7,2, \quad u_3 = u_2 \times q = 7,2 \times 1,2 = 8,64.$$

2. Pour une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q , le terme général est $u_n = u_0 \times q^n$. Ici,

$$u_n = 5 \times 1,2^n.$$

Conclusion. $u_1 = 6, u_2 = 7,2, u_3 = 8,64$, et $u_n = 5 \times 1,2^n$ pour tout entier n .

Exercice 2

Énoncé Compléter le tableau donnant le coefficient multiplicateur associé à un taux d'évolution.

Taux	+5 %	+12 %	-8 %	-20 %
Coeff.	...	...	...	...

Pour une augmentation de $p\%$, le coefficient multiplicateur est $1 + \frac{p}{100}$; pour une diminution de $p\%$, il vaut $1 - \frac{p}{100}$.

$$1 + \frac{5}{100} = 1,05, \quad 1 + \frac{12}{100} = 1,12, \quad 1 - \frac{8}{100} = 0,92, \quad 1 - \frac{20}{100} = 0,80.$$

Conclusion.

Taux	+5 %	+12 %	-8 %	-20 %
Coeff.	1,05	1,12	0,92	0,80

Exercice 3

Énoncé On exécute l'algorithme suivant.

```

t = 0
tant que t < 5 :
    t = t + 1

```

Quelle valeur de t obtient-on à la sortie de la boucle ? Combien de fois la boucle s'est-elle exécutée ?

On déroule l'algorithme pas à pas, en vérifiant à chaque tour si la condition $t < 5$ est encore vraie avant d'exécuter le corps de la boucle :

avant le tour	condition $t < 5$	action
$t = 0$	vraie	$t \leftarrow 1$
$t = 1$	vraie	$t \leftarrow 2$
$t = 2$	vraie	$t \leftarrow 3$
$t = 3$	vraie	$t \leftarrow 4$
$t = 4$	vraie	$t \leftarrow 5$
$t = 5$	fausse	on sort de la boucle

La boucle s'est donc exécutée 5 fois (pour $t = 0, 1, 2, 3, 4$), et la valeur finale affichée est $t = 5$.

Conclusion. La valeur finale est $t = 5$; la boucle s'est exécutée 5 fois.

Erreur fréquente Une erreur fréquente consiste à compter le nombre de valeurs prises par t (ici 0, 1, 2, 3, 4, 5, soit 6 valeurs) au lieu du nombre d'exécutions du corps de la boucle (ici 5). Le test de la condition qui provoque la sortie ($t = 5$) ne déclenche pas une exécution supplémentaire.

Exercice 4

Énoncé Simplifier, sans calculatrice (rappel N20).

a) $e^3 \times e^{-1}$ b) $(e^2)^3$
c) $\frac{e^5}{e^2}$ d) $e^{-x} \times e^{x+4}$

Propriété utilisée Pour tous réels a et b : $e^a \times e^b = e^{a+b}$; $\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$; $(e^a)^n = e^{na}$ pour tout entier n .

- a) $e^3 \times e^{-1} = e^{3+(-1)} = e^2$.
b) $(e^2)^3 = e^{2 \times 3} = e^6$.
c) $\frac{e^5}{e^2} = e^{5-2} = e^3$.
d) $e^{-x} \times e^{x+4} = e^{-x+(x+4)} = e^4$ (les termes en x s'éliminent : $-x + x + 4 = 4$).

Conclusion. a) e^2 ; b) e^6 ; c) e^3 ; d) e^4 .

Erreur fréquente Dans la question d), une erreur fréquente est de multiplier les exposants (« $-x \times (x+4)$ ») au lieu de les additionner : la règle $e^a \times e^b = e^{a+b}$ porte sur un produit d'exponentielles, elle donne donc une *somme* des exposants, jamais un produit.

B — Applications directes

Exercice 5

Énoncé Une suite géométrique (v_n) a pour raison 1,05.

1. Compléter : $e^{0,045} \approx \dots$; $e^{0,049} \approx \dots$; $e^{0,05} \approx \dots$ (à 0,001 près).
2. En déduire une valeur approchée à 0,001 près du réel k tel que $e^k \approx 1,05$.
3. Écrire la fonction exponentielle continue $f(t) = v_0 e^{kt}$ associée, pour $v_0 = 20$.

1. À la calculatrice (ou par balayage successif), on obtient, à 0,001 près :

$$e^{0,045} \approx 1,046, \quad e^{0,049} \approx 1,050, \quad e^{0,05} \approx 1,051.$$

2. On compare chacune de ces valeurs à 1,05 :

$$|1,046 - 1,05| = 0,004, \quad |1,050 - 1,05| = 0,000, \quad |1,051 - 1,05| = 0,001.$$

C'est la valeur $e^{0,049} \approx 1,050$ qui est la plus proche de 1,05. On retient donc $k \approx 0,049$.

3. Avec $v_0 = 20$ et $k \approx 0,049$, la fonction exponentielle continue associée à la suite est

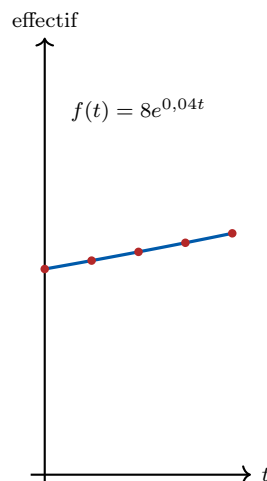
$$f(t) = 20 e^{0,049t}.$$

Conclusion. $k \approx 0,049$, et $f(t) = 20 e^{0,049t}$.

Exercice 6

Énoncé Le graphique représente les premiers termes d'une suite géométrique modélisée par $f(t) = 8e^{0,04t}$. Compléter le tableau de valeurs de f (arrondir à l'unité).

t	0	5	10	15
$f(t) \approx$	...	...	...	...



On calcule successivement, à la calculatrice :

$$f(0) = 8e^0 = 8 \times 1 = 8,$$

$$f(5) = 8e^{0,2} \approx 8 \times 1,2214 \approx 9,77 \approx 10,$$

$$f(10) = 8e^{0,4} \approx 8 \times 1,4918 \approx 11,93 \approx 12,$$

$$f(15) = 8e^{0,6} \approx 8 \times 1,8221 \approx 14,58 \approx 15.$$

Conclusion.

t	0	5	10	15
$f(t) \approx$	8	10	12	15

Exercice 7

Énoncé La valeur d'un véhicule diminue de 12 % chaque année. Sa valeur initiale est 18 000 €.

1. Exprimer la valeur v_n du véhicule au bout de n années.
2. On modélise cette évolution par $v(t) = 18\,000 e^{kt}$. Le réel k est-il positif ou négatif? Justifier sans calcul.
3. Sachant que $e^{-0,128} \approx 0,880$, proposer une valeur approchée de k .

1. Une diminution de 12 % chaque année correspond à un coefficient multiplicateur $q = 1 - \frac{12}{100} = 0,88$. La valeur du véhicule est donc une suite géométrique de premier terme $v_0 = 18\,000$ et de raison 0,88 :

$$v_n = 18\,000 \times 0,88^n.$$

2. La valeur du véhicule diminue au cours du temps : le modèle continu $v(t) = 18\,000 e^{kt}$ doit donc être décroissant. Or la fonction exponentielle est strictement croissante (propriété de N20) : pour que $t \mapsto e^{kt}$ soit décroissante, il faut que k soit **négatif**.

3. Le raisonnement de la question 2 est cohérent avec la valeur fournie : $e^{-0,128} \approx 0,880$, qui est bien proche de la raison $q = 0,88$ trouvée à la question 1. On retient donc

$$k \approx -0,128.$$

Conclusion. $v_n = 18\,000 \times 0,88^n$; $k < 0$; $k \approx -0,128$.

Exercice 8

Énoncé La masse restante (en grammes) d'un échantillon radioactif est modélisée par $m(t) = 50e^{-0,023t}$, t en années. Compléter l'algorithme déterminant au bout de combien d'années la masse descend sous 10 grammes.

```
t = ...
pas = 0.1
tant que ...:
    t = t + pas
```

La masse $m(t) = 50e^{-0,023t}$ est décroissante (coefficient $-0,023 < 0$ dans l'exposant). On cherche le premier instant où elle descend sous le seuil 10 : tant que la masse reste *supérieure* à 10, on continue à avancer t .

```

t = 0
pas = 0.1
tant que  $50 \times e^{-0,023t} > 10$  :
    t = t + pas

```

Erreur fréquente Une erreur fréquente est d'écrire la condition avec le sens inverse (**tant que** ... < 10), ce qui arrêterait immédiatement la boucle dès $t = 0$ puisque $m(0) = 50 > 10$: pour une grandeur qui *diminue* vers un seuil, la boucle doit se répéter tant que l'on est encore *au-dessus* du seuil.

À titre d'illustration, on peut vérifier à la calculatrice que cet algorithme renvoie une valeur proche de $t \approx 70$ (années) : en effet $50 e^{-0,023 \times 70} = 50 e^{-1,61} \approx 50 \times 0,1999 \approx 10,0$.

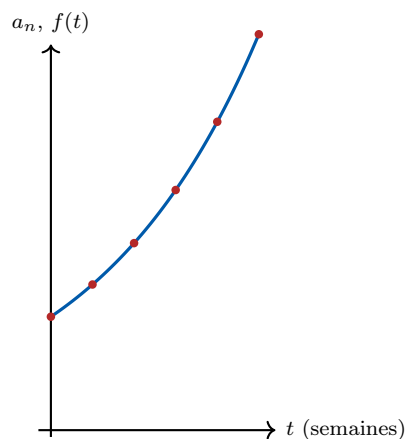
Conclusion. Algorithme complété avec $t = 0$ et la condition $50 \cdot \exp(-0.023 \cdot t) > 10$; la masse descend sous 10 g au bout d'environ 70 ans.

C — Entraînement approfondi

Exercice 9

Énoncé Le graphique représente une suite (a_n) (points) mesurant un effectif chaque semaine, et la fonction continue f associée (courbe).

1. La courbe passe-t-elle exactement par tous les points affichés ?
2. Peut-on affirmer que $f(2,5)$ donne l'effectif exact au milieu de la semaine 2 ? Justifier en rappelant ce que représente le modèle continu.



1. Oui : sur ce graphique, les points représentant (a_n) ont été placés exactement sur la courbe de f , aux abscisses entières. C'est la traduction graphique de la propriété du cours (partie 1 de N21) : pour une suite géométrique $a_n = a_0 q^n$, il existe un réel k tel que $a_n = f(n)$ où $f(t) = a_0 e^{kt}$: la suite est la « lecture » de la fonction continue aux instants entiers.

2. Non, on ne peut pas l'affirmer. Le modèle continu f est construit pour *coïncider avec la suite aux instants entiers*, mais rien dans l'énoncé ne garantit que l'effectif réel évolue continûment selon la loi f entre deux semaines : $f(2,5)$ est une valeur produite par le modèle mathématique, pas une mesure réelle de l'effectif à un instant non entier. Le modèle continu est un outil d'approximation et d'interprétation globale, pas une description garantie de ce qui se passe entre deux mesures.

Conclusion. Oui pour les points entiers (ils sont sur la courbe par construction) ; non pour $f(2,5)$, qui reste une extrapolation du modèle et non une valeur mesurée.

Exercice 10

Énoncé Un élève affirme : « La population croît de 4 % par an, donc le modèle continu est $f(t) = f(0) e^{0,04t}$. »

1. Cette affirmation est-elle exacte ? Expliquer pourquoi ce raccourci est trompeur.
2. Avec $f(0) = 100$, comparer à $t = 20$ la valeur donnée par le modèle discret ($1,04^{20} \approx 2,191$) et celle donnée par $100 e^{0,8} \approx 222,55$.
3. Conclure sur l'écart entre taux discret et paramètre continu lorsque t devient grand.

Propriété utilisée Pour un taux d'évolution discret p , le coefficient multiplicateur est $q = 1 + p$. Le paramètre continu k du modèle exponentiel vérifie $e^k \approx q$.

1. Non, cette affirmation n'est pas exacte : elle confond le taux d'évolution $p = 0,04$ avec le paramètre continu k . Le bon paramètre est le réel k tel que $e^k \approx q = 1,04$, et non $k = p = 0,04$ directement. Ces deux nombres sont proches lorsque p est petit, mais ne sont pas égaux.
2. Le modèle discret donne, au bout de 20 ans, une population multipliée par $1,04^{20} \approx 2,191$, soit une population de

$$100 \times 2,191 = 219,1.$$

Le modèle continu erroné de l'élève (avec $k = 0,04$) donne

$$100 e^{0,8} \approx 100 \times 2,2255 = 222,55.$$

Les deux résultats diffèrent : $222,55 - 219,1 = 3,45$, soit un écart d'environ 1,6 % de la valeur correcte.

3. Sur une seule année, remplacer k par $p = 0,04$ change très peu de choses ($e^{0,04} \approx 1,0408$, très proche de 1,04). Mais cette petite erreur se *multiplie* à chaque année dans le modèle discret réel, et l'écart entre les deux modèles s'accumule : plus t est grand, plus l'écart entre le modèle avec k exact et le modèle avec $k = p$ devient visible. Une approximation presque invisible à court terme peut donc devenir significative à long terme.

Conclusion. Le modèle de l'élève est incorrect : il confond p et k . L'écart, faible sur une année, atteint environ 3,45 (soit 1,6 %) après 20 ans, et continuerait de croître avec t .

Erreur fréquente L'erreur de cet exercice est particulièrement fréquente : poser directement $k = p$ (ici $k = 0,04$) au lieu de chercher, par balayage, le réel k tel que $e^k \approx q = 1 + p$. Elle est trompeuse car elle donne un résultat presque correct à court terme ($e^{0,04} \approx 1,0408$, très proche de 1,04), ce qui la rend difficile à repérer sur un petit exemple ; c'est seulement en comparant les deux modèles sur une durée plus longue, comme ici avec $t = 20$, que l'écart devient net.

Exercice 11

Énoncé Une association reçoit 200 € le premier mois. Chaque mois suivant, le montant reçu est multiplié par 1,1 par rapport au mois précédent.

1. Justifier que les montants forment une suite géométrique et donner sa raison.
2. Exprimer, à l'aide de la formule de la somme des termes d'une suite géométrique, le montant total reçu sur les 6 premiers mois, puis calculer une valeur approchée à l'euro près.
3. Sachant que $e^{0,095} \approx 1,0997$, écrire ces montants sous la forme $200 e^{kn}$ avec une valeur approchée de k .

On note u_n le montant reçu le $(n + 1)$ -ième mois, avec $n = 0$ pour le premier mois : ainsi $u_0 = 200$.

1. Chaque mois, le montant est multiplié par 1,1 par rapport au mois précédent : par définition, (u_n) est donc une suite géométrique de raison $q = 1,1$.

2. La somme des 6 premiers termes (mois 1 à 6, c'est-à-dire $n = 0$ à $n = 5$) d'une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison $q \neq 1$ est

$$S = u_0 \times \frac{1 - q^6}{1 - q}.$$

Avec $u_0 = 200$ et $q = 1,1$:

$$S = 200 \times \frac{1 - 1,1^6}{1 - 1,1} = 200 \times \frac{1 - 1,771561}{-0,1} = 200 \times \frac{-0,771561}{-0,1} = 200 \times 7,71561.$$

On obtient $S \approx 1543,12$, soit, à l'euro près, $S \approx 1543$ €.

3. On cherche k tel que $e^k \approx 1,1$. Or il est donné que $e^{0,095} \approx 1,0997$, valeur très proche de 1,1 : on retient donc $k \approx 0,095$. Les montants s'écrivent alors, pour $n = 0, 1, \dots, 5$:

$$u_n \approx 200 e^{0,095n}.$$

Conclusion. (u_n) est géométrique de raison 1,1 ; le total sur 6 mois vaut environ 1543 € ; $u_n \approx 200 e^{0,095n}$.

Exercice 12

Énoncé L'audience d'un podcast (en milliers d'auditeurs) suit $a(t) = 3e^{0,09t}$, t en mois. On veut savoir au bout de combien de mois l'audience dépassera 10 (milliers).

1. Est-il raisonnable de résoudre cette question par un calcul exact avec les outils de Première ? Justifier.
2. Décrire une méthode par tableau de valeurs, puis une méthode par algorithme de balayage. Laquelle est la plus précise ? Pourquoi ?

1. Résoudre exactement l'équation $3e^{0,09t} = 10$ demanderait d'isoler t dans $e^{0,09t} = \frac{10}{3}$, ce qui nécessite une fonction réciproque de l'exponentielle. Cette fonction (le logarithme népérien) n'est pas au programme de Première : il n'est donc pas raisonnable de chercher une résolution exacte avec les outils actuels.

2. **Méthode par tableau de valeurs** : on calcule $a(t)$ pour des valeurs de t de plus en plus précises (par exemple $t = 10, 11, 12, \dots$, puis on resserre l'intervalle où $a(t)$ dépasse 10, par exemple entre deux entiers, puis au dixième près, etc.).

Méthode par algorithme de balayage : on programme une boucle **tant que** $3e^{0,09t} < 10$, qui avance t d'un pas choisi (par exemple 0,01) jusqu'à ce que le seuil soit dépassé.

L'algorithme de balayage est en général **plus précis** et plus systématique : on choisit le pas aussi petit que l'on veut (la précision est directement contrôlée par ce choix), alors qu'un tableau de valeurs élaboré à la main devient vite fastidieux si l'on veut une précision fine, et sa précision dépend du nombre de valeurs qu'on accepte de calculer.

À titre d'illustration, un tel algorithme renverrait une valeur approchée proche de $t \approx 13,4$ mois (on vérifie $3e^{0,09 \times 13,4} = 3e^{1,206} \approx 3 \times 3,34 \approx 10,0$).

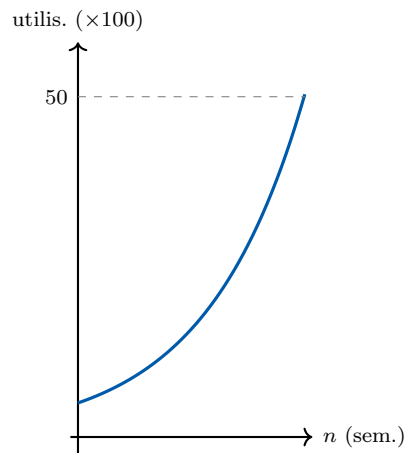
Conclusion. Une résolution exacte est hors de portée en Première (il faudrait une réciproque de exp) ; l'algorithme de balayage est la méthode la plus précise et la plus systématique.

D — Synthèse, problèmes et prises d'initiative

Exercice 13

Énoncé Une application mobile compte 500 utilisateurs à son lancement. Chaque semaine, ce nombre augmente de 8 %.

1. Donner l'expression du nombre d'utilisateurs u_n au bout de n semaines.
2. Sachant que $e^{0,077} \approx 1,080$, proposer une valeur de k pour le modèle continu $u(t) = 500 e^{kt}$.
3. Écrire un algorithme déterminant au bout de combien de semaines le nombre d'utilisateurs dépassera 5 000.
4. L'entreprise annonce atteindre ce seuil « en un peu plus d'un an ». Ce modèle confirme-t-il cette annonce ? Justifier.



1. Une augmentation de 8 % chaque semaine correspond à un coefficient multiplicateur $1 + \frac{8}{100} = 1,08$. Le nombre d'utilisateurs est donc une suite géométrique de premier terme $u_0 = 500$ et de raison 1,08 :

$$u_n = 500 \times 1,08^n.$$

2. Il est donné que $e^{0,077} \approx 1,080$, valeur qui correspond exactement à la raison trouvée. On retient donc

$$k \approx 0,077.$$

3. On cherche le premier instant où $u(t) = 500 e^{0,077t}$ dépasse 5 000 ; tant que ce n'est pas le cas, on avance t :

```
t = 0
pas = 0.01
tant que 500 × e0,077t < 5000 :
    t = t + pas
```

4. On peut répondre à cette question de deux façons cohérentes entre elles.

Avec le modèle *discret* exact : on cherche n tel que $500 \times 1,08^n > 5\,000$, c'est-à-dire $1,08^n > 10$. En testant les puissances de 1,08 à la calculatrice, on trouve $1,08^{29} \approx 9,32 < 10$ et $1,08^{30} \approx 10,06 > 10$: le seuil est dépassé à partir de $n = 30$ semaines.

Avec le modèle *continu* (celui de l'algorithme) : on vérifie que $500 e^{0,077 \times 30} = 500 e^{2,31} \approx 500 \times 10,07 \approx 5\,035$, ce qui confirme un dépassement autour de $t \approx 30$ semaines.

Or 30 semaines représentent environ $30 \times 7 = 210$ jours, soit un peu moins de 7 mois — c'est-à-dire **moins d'un an**, et non « un peu plus d'un an » comme annoncé. Le modèle ne confirme donc **pas** l'annonce de l'entreprise : d'après ce modèle, le seuil de 5 000 utilisateurs serait atteint plus vite que prévu.

Conclusion. $u_n = 500 \times 1,08^n$; $k \approx 0,077$; le seuil de 5 000 utilisateurs est dépassé au bout d'environ 30 semaines (moins d'un an) : l'annonce de l'entreprise est donc contredite par le modèle, qui prévoit un dépassement plus rapide.

Exercice 14

Énoncé Un club sportif comptait 80 adhérents il y a 5 ans; il en compte aujourd'hui 130. On modélise l'évolution par $N(t) = 80e^{kt}$, t en années depuis il y a 5 ans.

1. Écrire l'équation que doit vérifier k pour que le modèle soit cohérent avec les deux données.
2. Proposer une méthode, sans la résoudre formellement, pour obtenir une valeur approchée de k .
3. En déduire une estimation du nombre d'adhérents dans 3 ans, en supposant que la tendance se poursuit.

1. Avec la convention de l'énoncé, $t = 0$ correspond à « il y a 5 ans » (où il y avait 80 adhérents) et $t = 5$ correspond à « aujourd'hui » (où il y en a 130). On doit donc avoir $N(0) = 80$ (déjà vérifié, car $N(0) = 80e^0 = 80$) et $N(5) = 130$, c'est-à-dire

$$80e^{5k} = 130, \quad \text{soit} \quad e^{5k} = \frac{130}{80} = 1,625.$$

2. Comme en Première on ne dispose pas de réciproque de l'exponentielle, on ne peut pas isoler k formellement à partir de $e^{5k} = 1,625$. On procède par balayage : on teste plusieurs valeurs de k dans un tableau et on compare e^{5k} à 1,625.

k	0,09	0,10	0,097
e^{5k}	$e^{0,45} \approx 1,568$	$e^{0,5} \approx 1,649$	$e^{0,485} \approx 1,624$

La valeur $k = 0,097$ donne $e^{5k} \approx 1,624$, très proche de 1,625 : on retient $k \approx 0,097$.

3. « Dans 3 ans » correspond à $t = 5 + 3 = 8$ (toujours depuis « il y a 5 ans »). On calcule :

$$N(8) = 80e^{8 \times 0,097} = 80e^{0,776} \approx 80 \times 2,173 \approx 173,9.$$

Comme un nombre d'adhérents est un entier, on arrondit :

$$N(8) \approx 174.$$

Conclusion. $e^{5k} = 1,625$; par balayage, $k \approx 0,097$; dans 3 ans, le club compterait environ 174 adhérents selon ce modèle.

Exercice 15

Énoncé Rédiger une synthèse de cinq à huit lignes expliquant pourquoi un taux d'évolution discret p et le paramètre k d'un modèle exponentiel continu ne sont pas égaux en général. La réponse doit évoquer : coefficient multiplicateur, balayage, et un exemple numérique de ton choix.

Cette question est ouverte : il n'existe pas une unique rédaction correcte, mais toute réponse doit reprendre les trois éléments demandés avec exactitude. Voici un exemple de synthèse recevable.

Lorsqu'une grandeur évolue d'un taux constant p à chaque période, son évolution discrète se traduit par une suite géométrique de raison le coefficient multiplicateur $q = 1 + p$. Pour construire un modèle continu $f(t) = u_0 e^{kt}$ qui coïncide avec cette suite aux instants entiers, il faut que $e^k = q = 1 + p$. Or k n'est pas égal à p en général : par exemple, pour $p = 0,05$ (soit $q = 1,05$), on trouve par balayage $k \approx 0,049$, une valeur proche de p mais différente. Comme on ne dispose pas, en Première, d'une fonction réciproque de l'exponentielle, la valeur de k ne peut être obtenue que par balayage (tableau de valeurs, calculatrice), jamais par un calcul formel direct à partir de p .

Propriété utilisée Une synthèse réussie doit distinguer clairement trois idées : le passage de p à $q = 1 + p$ (ou $1 - p$), le passage de q à k (approché par balayage, car $k \neq p$ en général), et la raison pour laquelle ce passage ne peut pas être un calcul formel direct en Première.

Exercice 16

Énoncé On considère $f(t) = 200e^{-0,15t} + 50$, qui modélise la température (en °C) d'un objet qui refroidit au contact de l'air ambiant à 50°C.

1. En réutilisant les acquis de N20 sur la dérivée d'une exponentielle, étudier le sens de variation de f sur $[0; +\infty[$.
2. Quelle est la température à l'instant initial ? Vers quelle température tend $f(t)$ lorsque t devient grand ? Interpréter physiquement.
3. Écrire un algorithme de balayage déterminant au bout de combien de temps la température descend sous 60°C.

Propriété utilisée Pour tout réel a , la fonction $t \mapsto e^{at}$ a pour dérivée $t \mapsto a e^{at}$ (propriété de N20). La dérivée d'une constante est nulle.

1. La fonction f est la somme de $t \mapsto 200e^{-0,15t}$ et de la fonction constante égale à 50. En utilisant la propriété ci-dessus avec $a = -0,15$:

$$f'(t) = 200 \times (-0,15) e^{-0,15t} + 0 = -30 e^{-0,15t}.$$

Pour tout réel t , $e^{-0,15t} > 0$ (l'exponentielle est toujours strictement positive), donc

$$f'(t) = -30 e^{-0,15t} < 0 \quad \text{pour tout } t \geq 0.$$

Ainsi, f est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$.

2. À l'instant initial, $t = 0$:

$$f(0) = 200e^0 + 50 = 200 \times 1 + 50 = 250.$$

La température initiale est donc 250°C.

Lorsque t devient grand, $e^{-0,15t}$ se rapproche de 0 (plus l'exposant est très négatif, plus l'exponentielle est proche de 0), donc $f(t)$ se rapproche de $200 \times 0 + 50 = 50$.

Interprétation physique : la température de l'objet, initialement très chaude (250°C), diminue continûment et se stabilise progressivement autour de 50°C, la température de l'air ambiant : c'est cohérent avec le contexte, un objet chaud refroidit jusqu'à atteindre (sans jamais descendre en dessous) la température de son environnement.

3. On cherche le premier instant où $f(t)$ descend sous 60°C ; comme f est décroissante, on avance t tant que $f(t)$ reste au-dessus de ce seuil :

```
t = 0
pas = 0.1
tant que 200 × e-0,15t + 50 > 60 :
    t = t + pas
```

Conclusion. f est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$; la température initiale est 250°C et $f(t)$ tend vers 50°C (la température ambiante) ; l'algorithme ci-dessus détermine l'instant où la température descend sous 60°C.