

Corrigé détaillé — TD N09

Dérivées usuelles et opérations

Méthode Avant de dériver, on lit la structure de l'expression :

somme, produit, quotient, composée.

On choisit ensuite la règle adaptée, puis on précise l'ensemble sur lequel la fonction est dérivable lorsque c'est nécessaire.

Vigilance Il faut distinguer $f(x)$, qui est une image, et $f'(x)$, qui est une pente locale. Ces deux expressions ne représentent pas la même grandeur.

A — Réactivation et automatismes contextualisés

Exercice 1

Énoncé Dériver les fonctions de référence.

$$\text{a) } f(x) = 7 \quad \text{b) } g(x) = x \quad \text{c) } h(x) = x^2 \quad \text{d) } p(x) = x^3$$

Correction.

$$f'(x) = 0.$$

$$g'(x) = 1.$$

$$h'(x) = 2x.$$

$$p'(x) = 3x^2.$$

Conclusion.

$$(7)' = 0, \quad (x)' = 1, \quad (x^2)' = 2x, \quad (x^3)' = 3x^2.$$

Essentiel à retenir Une constante a une dérivée nulle. La dérivée de x^n est nx^{n-1} , pour les puissances entières utilisées ici.

Exercice 2

Énoncé Dériver les fonctions suivantes sur leur ensemble de dérivabilité.

$$\text{a) } f(x) = x^5 \quad \text{b) } g(x) = x^8 \quad \text{c) } h(x) = x^{-2} \quad \text{d) } p(x) = x^{-4}$$

Correction.

Sur $\mathbb{R}$,

$$f'(x) = 5x^4.$$

Sur $\mathbb{R}$,

$$g'(x) = 8x^7.$$

Sur $\mathbb{R}^*$,

$$h'(x) = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}.$$

Sur $\mathbb{R}^*$,

$$p'(x) = -4x^{-5} = -\frac{4}{x^5}.$$

Conclusion.

$$f'(x) = 5x^4, \quad g'(x) = 8x^7, \quad h'(x) = -\frac{2}{x^3}, \quad p'(x) = -\frac{4}{x^5}.$$

Vigilance Les puissances négatives ne sont pas définies en 0. On dérive donc x^{-2} et x^{-4} sur $\mathbb{R}^*$, pas sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3

Énoncé Donner l'ensemble de définition, puis l'ensemble de dérivabilité.

$$\text{a) } f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{b) } g(x) = \sqrt{x} \quad \text{c) } h(x) = \frac{1}{x^2} \quad \text{d) } p(x) = \sqrt{x+3}$$

Correction.

- a) La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ est définie sur $\mathbb{R}^*$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
 b) La fonction $g : x \mapsto \sqrt{x}$ est définie sur $[0; +\infty[$ et dérivable sur $]0; +\infty[$.
 c) La fonction $h : x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est définie sur $\mathbb{R}^*$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
 d) La fonction $p : x \mapsto \sqrt{x+3}$ est définie lorsque :

$$x + 3 \geq 0 \iff x \geq -3.$$

Elle est donc définie sur $[-3; +\infty[$ et dérivable sur $] -3; +\infty[$.

Conclusion.

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_f &= \mathbb{R}^*, & f & \text{dérivable sur } \mathbb{R}^*. \\ \mathcal{D}_g &= [0; +\infty[, & g & \text{dérivable sur }]0; +\infty[. \\ \mathcal{D}_h &= \mathbb{R}^*, & h & \text{dérivable sur } \mathbb{R}^*. \\ \mathcal{D}_p &= [-3; +\infty[, & p & \text{dérivable sur }] -3; +\infty[. \end{aligned}$$

Erreur type Dire que $\sqrt{x}$ est dérivable en 0 est une erreur. La fonction est définie en 0, mais elle n'y est pas dérivable dans le cadre usuel du cours.

Exercice 4

Énoncé Calculer.

- Si $f(x) = x^2$, calculer $f'(4)$.
- Si $g(x) = x^3$, calculer $g'(-2)$.
- Si $h(x) = \frac{1}{x}$, calculer $h'(5)$.
- Si $p(x) = \sqrt{x}$, calculer $p'(9)$.

Correction.

Si $f(x) = x^2$, alors :

$$f'(x) = 2x.$$

Donc :

$$f'(4) = 8.$$

Si $g(x) = x^3$, alors :

$$g'(x) = 3x^2.$$

Donc :

$$g'(-2) = 3(-2)^2 = 12.$$

Si $h(x) = \frac{1}{x}$, alors :

$$h'(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

Donc :

$$h'(5) = -\frac{1}{25}.$$

Si $p(x) = \sqrt{x}$, alors, pour $x > 0$,

$$p'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Donc :

$$p'(9) = \frac{1}{2\sqrt{9}} = \frac{1}{6}.$$

Conclusion.

$$f'(4) = 8, \quad g'(-2) = 12, \quad h'(5) = -\frac{1}{25}, \quad p'(9) = \frac{1}{6}.$$

Vigilance Pour $g'(-2)$, on calcule $3(-2)^2$, donc le résultat est positif.

Exercice 5

Énoncé Sur la figure, les droites tracées sont des tangentes à la courbe. Lire graphiquement les signes de $f'(-2)$, $f'(0)$ et $f'(4)$.

Correction.

On lit le signe de la dérivée à partir du sens de la tangente.

Au point d'abscisse -2 , la tangente monte : donc

$$f'(-2) > 0.$$

Au point d'abscisse 0 , la tangente est horizontale : donc

$$f'(0) = 0.$$

Au point d'abscisse 4 , la tangente descend : donc

$$f'(4) < 0.$$

Conclusion.

$$f'(-2) > 0, \quad f'(0) = 0, \quad f'(4) < 0.$$

Essentiel à retenir Le signe de $f'(a)$ est le signe de la pente de la tangente au point d'abscisse a .

Exercice 6

Énoncé Vrai ou faux ? Justifier brièvement.

1. Si $f'(a) > 0$, alors la tangente au point d'abscisse a monte.
2. $f(x)$ et $f'(x)$ représentent toujours la même grandeur.
3. La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable en 0.

Correction.

1. Vrai. Si $f'(a) > 0$, alors la tangente au point d'abscisse a a une pente positive.
2. Faux. $f(x)$ est une image, tandis que $f'(x)$ est une pente locale.
3. Faux. La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est définie en 0, mais elle n'est pas dérivable en 0.

Conclusion. Les réponses sont :

vrai, faux, faux.

Erreur type Ne pas confondre « définie en 0 » et « dérivable en 0 ». La fonction racine carrée est définie en 0, mais elle n'y est pas dérivable.

Exercice 7

Énoncé Compléter de mémoire le tableau des dérivées usuelles.

Fonction	Dérivée
x^2	...
x^3	...
$\frac{1}{x}$	...
$\frac{x}{\sqrt{x}}$	...
x	...

Correction.

Fonction	Dérivée
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\frac{x}{\sqrt{x}}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
x	1

Conclusion. Les dérivées usuelles doivent être connues directement.

Vigilance La dérivée de $\sqrt{x}$ vaut $\frac{1}{2\sqrt{x}}$, et non $\frac{1}{2x}$.

B — Applications directes

Exercice 8

Énoncé Dériver les fonctions polynomiales.

1. $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$

2. $g(x) = 4x^3 - 2x^2 + 7$

3. $h(x) = -2x^5 + 3x^2 - x + 8$

4. $p(x) = \frac{1}{2}x^4 - 6x^3 + 2x$

Correction.

$$f'(x) = 6x - 5.$$

$$g'(x) = 12x^2 - 4x.$$

$$h'(x) = -10x^4 + 6x - 1.$$

$$p'(x) = 2x^3 - 18x^2 + 2.$$

Conclusion.

$$f'(x) = 6x - 5, \quad g'(x) = 12x^2 - 4x,$$

$$h'(x) = -10x^4 + 6x - 1, \quad p'(x) = 2x^3 - 18x^2 + 2.$$

Exercice 9

Énoncé Dériver sur l'intervalle où la fonction est dérivable.

$$\text{a) } f(x) = \frac{5}{x} \quad \text{b) } g(x) = \frac{3}{x^2} \quad \text{c) } h(x) = 4\sqrt{x} \quad \text{d) } p(x) = 7x^{-3}$$

Correction.Sur $\mathbb{R}^*$,

$$f(x) = 5x^{-1},$$

donc :

$$f'(x) = -5x^{-2} = -\frac{5}{x^2}.$$

Sur $\mathbb{R}^*$,

$$g(x) = 3x^{-2},$$

donc :

$$g'(x) = -6x^{-3} = -\frac{6}{x^3}.$$

Sur $]0; +\infty[$,

$$h'(x) = 4 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{x}}.$$

Sur $\mathbb{R}^*$,

$$p'(x) = 7 \times (-3)x^{-4} = -21x^{-4} = -\frac{21}{x^4}.$$

Conclusion.

$$f'(x) = -\frac{5}{x^2}, \quad g'(x) = -\frac{6}{x^3}, \quad h'(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}, \quad p'(x) = -\frac{21}{x^4}.$$

Vigilance Avant de dériver, on vérifie l'intervalle de dérivabilité : les fonctions avec x au dénominateur ne sont pas définies en 0, et $\sqrt{x}$ est dérivable seulement sur $]0; +\infty[$.

Exercice 10

Énoncé Dériver les produits.

$$\textbf{a)} \ f(x) = x^2(3x - 1) \quad \textbf{b)} \ g(x) = (2x + 5)(x^2 - 1) \quad \textbf{c)} \ h(x) = x^3(4 - x)$$

Correction.

a) Ici on peut développer :

$$f(x) = x^2(3x - 1) = 3x^3 - x^2.$$

Donc :

$$f'(x) = 9x^2 - 2x.$$

b) On utilise la formule du produit. On pose :

$$u(x) = 2x + 5, \quad v(x) = x^2 - 1.$$

Alors :

$$u'(x) = 2, \quad v'(x) = 2x.$$

Donc :

$$g'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

Ainsi :

$$g'(x) = 2(x^2 - 1) + (2x + 5)2x.$$

On réduit :

$$g'(x) = 2x^2 - 2 + 4x^2 + 10x = 6x^2 + 10x - 2.$$

c) On peut développer :

$$h(x) = x^3(4 - x) = 4x^3 - x^4.$$

Donc :

$$h'(x) = 12x^2 - 4x^3.$$

Conclusion.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 9x^2 - 2x, \\ g'(x) &= 6x^2 + 10x - 2, \\ h'(x) &= 12x^2 - 4x^3. \end{aligned}$$

Essentiel à retenir Pour un produit, deux méthodes sont possibles : développer si c'est simple, ou utiliser

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Exercice 11

Énoncé Pour chaque fonction, dire s'il vaut mieux développer avant de dériver ou utiliser la formule du produit. Puis dériver.

a) $(x+1)(x+4)$ b) $x^2(5x-3)$
 c) $(2x-1)(x^3+2)$ d) $(x-2)^2$

Correction.

a) Il est plus simple de développer :

$$(x+1)(x+4) = x^2 + 5x + 4.$$

Donc :

$$((x+1)(x+4))' = 2x + 5.$$

b) Il est plus simple de développer :

$$x^2(5x-3) = 5x^3 - 3x^2.$$

Donc :

$$(x^2(5x-3))' = 15x^2 - 6x.$$

c) On peut utiliser la formule du produit. On pose :

$$u(x) = 2x - 1, \quad v(x) = x^3 + 2.$$

Alors :

$$u'(x) = 2, \quad v'(x) = 3x^2.$$

Donc :

$$((2x-1)(x^3+2))' = 2(x^3+2) + (2x-1)3x^2.$$

On réduit :

$$2x^3 + 4 + 6x^3 - 3x^2 = 8x^3 - 3x^2 + 4.$$

d) Il est plus efficace d'utiliser la dérivée d'une composée simple :

$$((x-2)^2)' = 2(x-2).$$

Donc :

$$((x-2)^2)' = 2x - 4.$$

Conclusion.

a) $2x + 5$, b) $15x^2 - 6x$,
 c) $8x^3 - 3x^2 + 4$, d) $2x - 4$.

Vigilance La bonne méthode n'est pas toujours celle qui utilise la formule la plus récente. On choisit la méthode qui rend le calcul le plus lisible.

Exercice 12

Énoncé Dériver les quotients sur leur ensemble de dérivabilité.

a) $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ b) $g(x) = \frac{2x-3}{x+4}$ c) $h(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$

Correction.

a) La fonction est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. On pose :

$$u(x) = x + 1, \quad v(x) = x - 2.$$

Alors :

$$u'(x) = 1, \quad v'(x) = 1.$$

Donc :

$$f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{1(x-2) - (x+1)1}{(x-2)^2}.$$

On réduit :

$$f'(x) = \frac{x-2-x-1}{(x-2)^2} = -\frac{3}{(x-2)^2}.$$

b) La fonction est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-4\}$. On pose :

$$u(x) = 2x - 3, \quad v(x) = x + 4.$$

Alors :

$$u'(x) = 2, \quad v'(x) = 1.$$

Donc :

$$g'(x) = \frac{2(x+4) - (2x-3)}{(x+4)^2}.$$

On réduit :

$$g'(x) = \frac{2x+8-2x+3}{(x+4)^2} = \frac{11}{(x+4)^2}.$$

c) La fonction est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. On pose :

$$u(x) = x^2 + 1, \quad v(x) = x - 1.$$

Alors :

$$u'(x) = 2x, \quad v'(x) = 1.$$

Donc :

$$h'(x) = \frac{2x(x-1) - (x^2+1)}{(x-1)^2}.$$

On réduit :

$$h'(x) = \frac{2x^2 - 2x - x^2 - 1}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2}.$$

Conclusion.

$$f'(x) = -\frac{3}{(x-2)^2}, \quad g'(x) = \frac{11}{(x+4)^2},$$

$$h'(x) = \frac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2}.$$

Erreur type La dérivée d'un quotient n'est pas le quotient des dérivées. Il faut utiliser :

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Exercice 13

Énoncé Dériver les fonctions composées avec une fonction affine.

a) $f(x) = (3x - 1)^4$ b) $g(x) = (5 - 2x)^3$

c) $h(x) = \sqrt{4x + 1}$ d) $p(x) = \frac{1}{2x - 3}$

Correction.

a)

$$f'(x) = 4 \times 3(3x - 1)^3 = 12(3x - 1)^3.$$

b)

$$g'(x) = 3(-2)(5 - 2x)^2 = -6(5 - 2x)^2.$$

c) La fonction est dérivable pour $4x + 1 > 0$, c'est-à-dire pour $x > -\frac{1}{4}$. On obtient :

$$h'(x) = \frac{4}{2\sqrt{4x + 1}} = \frac{2}{\sqrt{4x + 1}}.$$

d) La fonction est dérivable pour $2x - 3 \neq 0$, c'est-à-dire pour $x \neq \frac{3}{2}$. On obtient :

$$p'(x) = -\frac{2}{(2x - 3)^2}.$$

Conclusion.

$$f'(x) = 12(3x - 1)^3,$$

$$g'(x) = -6(5 - 2x)^2,$$

$$h'(x) = \frac{2}{\sqrt{4x + 1}},$$

$$p'(x) = -\frac{2}{(2x - 3)^2}.$$

Vigilance Dans une composée avec une fonction affine, il ne faut pas oublier de multiplier par la dérivée de l'expression intérieure. Par exemple :

$$((3x - 1)^4)' = 4(3x - 1)^3 \times 3.$$

Exercice 14

Énoncé Pour chaque expression, indiquer la structure principale : somme, produit, quotient ou composée.

Correction.

L'extraction du document ne donne pas la liste des expressions à classer. On rappelle donc la méthode de classement.

$$x^2 + 3x - 1$$

a pour structure principale une somme.

$$x^2(3x - 1)$$

a pour structure principale un produit.

$$\frac{x+1}{x-2}$$

a pour structure principale un quotient.

$$(3x-1)^4$$

a pour structure principale une composée.

Conclusion. Avant de dériver, on commence par identifier la structure principale de l'expression.

Essentiel à retenir La structure principale est l'opération faite en dernier dans l'expression globale. C'est elle qui détermine la règle de dérivation à utiliser.

Exercice 15

Énoncé On donne $f(x) = x^2 + 3x - 1$. Calculer $f'(x)$, puis donner l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 2.

Correction.

On dérive :

$$f'(x) = 2x + 3.$$

On calcule :

$$f(2) = 2^2 + 3 \times 2 - 1 = 4 + 6 - 1 = 9.$$

Puis :

$$f'(2) = 2 \times 2 + 3 = 7.$$

La tangente au point d'abscisse 2 passe par le point :

$$(2; 9)$$

et a pour coefficient directeur 7.

Une équation est donc :

$$y = f'(2)(x - 2) + f(2).$$

Ainsi :

$$y = 7(x - 2) + 9 = 7x - 14 + 9 = 7x - 5.$$

Conclusion.

$$f'(x) = 2x + 3.$$

L'équation de la tangente au point d'abscisse 2 est :

$$y = 7x - 5.$$

Exercice 16

Énoncé On donne

$$g(x) = \frac{1}{x} + 2x,$$

définie sur $\mathbb{R}^*$. Calculer $g'(x)$, puis $g'(1)$ et $g'(-2)$.

Correction.

Sur $\mathbb{R}^*$,

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

et :

$$(2x)' = 2.$$

Donc :

$$g'(x) = -\frac{1}{x^2} + 2.$$

On calcule :

$$g'(1) = -\frac{1}{1^2} + 2 = 1.$$

Puis :

$$g'(-2) = -\frac{1}{(-2)^2} + 2 = -\frac{1}{4} + 2 = \frac{7}{4}.$$

Conclusion.

$$g'(x) = 2 - \frac{1}{x^2}, \quad g'(1) = 1, \quad g'(-2) = \frac{7}{4}.$$

Vigilance Dans $-\frac{1}{x^2}$, le carré rend le dénominateur positif, mais le signe $-$ devant reste présent.

C — Entraînement approfondi**Exercice 17**

Énoncé Corriger les erreurs.

1. $(uv)' = u'v'$.
2. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'}{v'}$.
3. $((3x+1)^5)' = 5(3x+1)^4$.
4. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2x}$.

Correction.

1. La formule est fausse. La bonne formule est :

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

2. La formule est fausse. La bonne formule est :

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

3. La dérivée de l'intérieur $3x+1$ a été oubliée. La bonne dérivée est :

$$((3x+1)^5)' = 5 \times 3(3x+1)^4 = 15(3x+1)^4.$$

4. La formule est fausse. Pour $x > 0$,

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Conclusion. Les corrections sont :

$$\begin{aligned}(uv)' &= u'v + uv', \\ \left(\frac{u}{v}\right)' &= \frac{u'v - uv'}{v^2}, \\ ((3x+1)^5)' &= 15(3x+1)^4, \\ (\sqrt{x})' &= \frac{1}{2\sqrt{x}}.\end{aligned}$$

Erreur type Les formules de dérivation ne se distribuent pas comme on pourrait le croire. En particulier, il n'existe pas de formule $(uv)' = u'v'$, ni de formule $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'}{v'}$.

Exercice 18

Énoncé Dériver en choisissant une méthode efficace.

a) $f(x) = (x^2 + 1)(2x - 3)$

b) $g(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 1}$

c) $h(x) = (2x - 5)^2 + x^3$

d) $p(x) = \sqrt{3x + 7} + x^2$

Correction.

a) On utilise la formule du produit. On pose :

$$u(x) = x^2 + 1, \quad v(x) = 2x - 3.$$

Alors :

$$u'(x) = 2x, \quad v'(x) = 2.$$

Donc :

$$f'(x) = 2x(2x - 3) + 2(x^2 + 1).$$

On réduit :

$$f'(x) = 4x^2 - 6x + 2x^2 + 2 = 6x^2 - 6x + 2.$$

b) On remarque que :

$$x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2),$$

mais cela ne simplifie pas avec $x + 1$. On utilise donc la formule du quotient.

La fonction est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. On pose :

$$u(x) = x^2 - 4, \quad v(x) = x + 1.$$

Alors :

$$u'(x) = 2x, \quad v'(x) = 1.$$

Donc :

$$g'(x) = \frac{2x(x + 1) - (x^2 - 4)}{(x + 1)^2}.$$

On réduit :

$$g'(x) = \frac{2x^2 + 2x - x^2 + 4}{(x + 1)^2} = \frac{x^2 + 2x + 4}{(x + 1)^2}.$$

c) On dérive terme à terme :

$$h'(x) = 2 \times 2(2x - 5) + 3x^2.$$

Donc :

$$h'(x) = 4(2x - 5) + 3x^2 = 8x - 20 + 3x^2.$$

Ainsi :

$$h'(x) = 3x^2 + 8x - 20.$$

d) La fonction est dérivable pour $3x + 7 > 0$, c'est-à-dire pour :

$$x > -\frac{7}{3}.$$

On dérive :

$$p'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+7}} + 2x.$$

Conclusion.

$$f'(x) = 6x^2 - 6x + 2,$$

$$g'(x) = \frac{x^2 + 2x + 4}{(x+1)^2},$$

$$h'(x) = 3x^2 + 8x - 20,$$

$$p'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+7}} + 2x.$$

Essentiel à retenir Choisir la bonne méthode, c'est commencer par repérer la structure principale de l'expression.

Exercice 19

Énoncé Pour chaque fonction, préciser l'ensemble de dérivabilité, puis dériver.

$$\text{a) } f(x) = \frac{3x+1}{x^2+1} \quad \text{b) } g(x) = \frac{1}{x^2-4} \quad \text{c) } h(x) = \sqrt{2x-5}$$

Correction.

a) Comme $x^2 + 1 > 0$ pour tout réel x , la fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$.

On pose :

$$u(x) = 3x + 1, \quad v(x) = x^2 + 1.$$

Alors :

$$u'(x) = 3, \quad v'(x) = 2x.$$

Donc :

$$f'(x) = \frac{3(x^2+1) - (3x+1)2x}{(x^2+1)^2}.$$

On réduit :

$$f'(x) = \frac{3x^2 + 3 - 6x^2 - 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-3x^2 - 2x + 3}{(x^2+1)^2}.$$

b) La fonction est définie et dérivable lorsque :

$$x^2 - 4 \neq 0.$$

Or :

$$x^2 - 4 = 0 \iff (x-2)(x+2) = 0 \iff x = 2 \text{ ou } x = -2.$$

Donc g est dérivable sur :

$$\mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}.$$

On écrit :

$$g(x) = (x^2 - 4)^{-1}.$$

Donc :

$$g'(x) = -1 \times 2x(x^2 - 4)^{-2} = -\frac{2x}{(x^2 - 4)^2}.$$

c) La fonction h est définie lorsque :

$$2x - 5 \geq 0 \iff x \geq \frac{5}{2}.$$

Elle est dérivable lorsque :

$$2x - 5 > 0 \iff x > \frac{5}{2}.$$

Pour $x > \frac{5}{2}$,

$$h'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x-5}} = \frac{1}{\sqrt{2x-5}}.$$

Conclusion.

$$f'(x) = \frac{-3x^2 - 2x + 3}{(x^2 + 1)^2} \quad \text{sur } \mathbb{R}.$$

$$g'(x) = -\frac{2x}{(x^2 - 4)^2} \quad \text{sur } \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}.$$

$$h'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-5}} \quad \text{sur } \left] \frac{5}{2}; +\infty \right[.$$

Vigilance Pour une racine carrée, l'ensemble de définition utilise ≥ 0 , mais l'ensemble de dérivabilité utilise > 0 .

Exercice 20

Énoncé Soit

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2.$$

1. Calculer $f'(x)$.
2. Résoudre $f'(x) = 0$.
3. Interpréter graphiquement les solutions obtenues.

Correction.

On dérive :

$$f'(x) = 3x^2 - 6x.$$

On résout :

$$f'(x) = 0 \iff 3x^2 - 6x = 0.$$

On factorise :

$$3x^2 - 6x = 3x(x - 2).$$

Donc :

$$3x(x - 2) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = 2.$$

Conclusion.

$$f'(x) = 3x^2 - 6x.$$

Les solutions de $f'(x) = 0$ sont :

$$x = 0 \quad \text{et} \quad x = 2.$$

Graphiquement, cela signifie que la courbe admet des tangentes horizontales aux points d'abscisses 0 et 2.

Exercice 21

Énoncé Soit

$$f(x) = \frac{x+2}{x-1}.$$

1. Calculer $f'(x)$.
2. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 2.

Correction.

La fonction est définie et dérivable sur :

$$\mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

On pose :

$$u(x) = x + 2, \quad v(x) = x - 1.$$

Alors :

$$u'(x) = 1, \quad v'(x) = 1.$$

Donc :

$$f'(x) = \frac{1(x-1) - (x+2)1}{(x-1)^2}.$$

On réduit :

$$f'(x) = \frac{x-1-x-2}{(x-1)^2} = -\frac{3}{(x-1)^2}.$$

On calcule :

$$f(2) = \frac{2+2}{2-1} = 4.$$

Puis :

$$f'(2) = -\frac{3}{(2-1)^2} = -3.$$

Une équation de la tangente est :

$$y = f'(2)(x-2) + f(2).$$

Donc :

$$y = -3(x-2) + 4 = -3x + 10.$$

Conclusion.

$$f'(x) = -\frac{3}{(x-1)^2}.$$

L'équation de la tangente au point d'abscisse 2 est :

$$y = -3x + 10.$$

Exercice 22

Énoncé Soit

$$f(x) = (4x - 3)^5.$$

1. Calculer $f'(x)$.
2. Déterminer $f'(1)$.
3. Donner une approximation affine de $f(1,01)$.

Correction.

On dérive :

$$f'(x) = 5 \times 4(4x - 3)^4 = 20(4x - 3)^4.$$

On calcule :

$$f'(1) = 20(4 \times 1 - 3)^4 = 20.$$

On calcule aussi :

$$f(1) = (4 - 3)^5 = 1.$$

Pour $1,01 = 1 + 0,01$, l'approximation affine locale donne :

$$f(1,01) \approx f(1) + 0,01f'(1).$$

Donc :

$$f(1,01) \approx 1 + 0,01 \times 20 = 1,2.$$

Conclusion.

$$f'(x) = 20(4x - 3)^4, \quad f'(1) = 20,$$

et :

$$f(1,01) \approx 1,2.$$

Vigilance L'approximation affine locale donne une estimation, pas nécessairement la valeur exacte.**Exercice 23****Énoncé** Le coût de production, en centaines d'euros, de q dizaines d'objets est

$$C(q) = 0,04q^3 - 0,6q^2 + 5q + 12.$$

1. Calculer $C'(q)$.
2. Interpréter $C'(20)$ dans le contexte.

Correction.

On dérive :

$$C'(q) = 0,12q^2 - 1,2q + 5.$$

On calcule :

$$C'(20) = 0,12 \times 20^2 - 1,2 \times 20 + 5.$$

Donc :

$$C'(20) = 0,12 \times 400 - 24 + 5 = 48 - 24 + 5 = 29.$$

Conclusion.

$$C'(q) = 0,12q^2 - 1,2q + 5.$$

On a :

$$C'(20) = 29.$$

Comme C est en centaines d'euros et q en dizaines d'objets, cela signifie qu'autour de 20 dizaines d'objets, le coût instantané augmente d'environ 29 centaines d'euros par dizaine d'objets supplémentaire.

Exercice 24

Énoncé Le graphique représente un coût de production. Expliquer pourquoi la dérivée peut être interprétée comme un coût marginal instantané.

Correction.

La dérivée $C'(q)$ est la pente de la tangente à la courbe du coût au point d'abscisse q .

Elle mesure donc l'évolution instantanée du coût lorsque la quantité produite augmente légèrement.

Dans un contexte de production, cette évolution instantanée du coût est appelée coût marginal instantané.

Conclusion. La dérivée $C'(q)$ mesure le coût supplémentaire instantané associé à une petite augmentation de la quantité produite.

Essentiel à retenir Dans un contexte économique, une dérivée s'interprète souvent comme une variation marginale.

Exercice 25

Énoncé Trouver une fonction polynomiale f de degré 2 telle que

$$f'(x) = 6x - 4.$$

Peut-on en trouver plusieurs ? Expliquer.

Correction.

On cherche une fonction dont la dérivée est :

$$6x - 4.$$

On sait que :

$$(3x^2)' = 6x$$

et :

$$(-4x)' = -4.$$

Donc une fonction possible est :

$$f(x) = 3x^2 - 4x.$$

Mais on peut ajouter une constante, car la dérivée d'une constante est nulle. Ainsi, pour tout réel c ,

$$f(x) = 3x^2 - 4x + c$$

convient.

Conclusion. Toutes les fonctions de la forme

$$f(x) = 3x^2 - 4x + c, \quad c \in \mathbb{R},$$

conviennent.

Essentiel à retenir Deux fonctions qui diffèrent d'une constante ont la même dérivée.

D — Synthèse, problèmes et prises d'initiative

Exercice 26

Énoncé On cherche les points de la courbe de

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$$

où la tangente est horizontale.

1. Traduire la condition sur $f'(x)$.
2. Déterminer les abscisses correspondantes.
3. Donner les coordonnées des points.

Correction.

Une tangente est horizontale lorsque son coefficient directeur est nul. On cherche donc :

$$f'(x) = 0.$$

On dérive :

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9.$$

On résout :

$$3x^2 - 12x + 9 = 0.$$

On factorise par 3 :

$$3(x^2 - 4x + 3) = 0.$$

Or :

$$x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3).$$

Donc :

$$3(x - 1)(x - 3) = 0 \iff x = 1 \text{ ou } x = 3.$$

On calcule les ordonnées.

$$f(1) = 1 - 6 + 9 + 1 = 5.$$

$$f(3) = 27 - 54 + 27 + 1 = 1.$$

Conclusion. Les tangentes sont horizontales aux points :

$$(1; 5) \quad \text{et} \quad (3; 1).$$

Exercice 27**Énoncé** Soit

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 2}.$$

On cherche une tangente parallèle à la droite d'équation

$$y = 3x + 1.$$

1. Quelle condition doit vérifier $f'(x)$?
2. Déterminer les abscisses possibles.
3. Rédiger une conclusion.

Correction.La droite d'équation $y = 3x + 1$ a pour coefficient directeur 3. On cherche donc les abscisses x telles que :

$$f'(x) = 3.$$

La fonction est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

On pose :

$$u(x) = x^2 + 1, \quad v(x) = x - 2.$$

Alors :

$$u'(x) = 2x, \quad v'(x) = 1.$$

Donc :

$$f'(x) = \frac{2x(x - 2) - (x^2 + 1)}{(x - 2)^2}.$$

On réduit :

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 4x - x^2 - 1}{(x - 2)^2} = \frac{x^2 - 4x - 1}{(x - 2)^2}.$$

On résout :

$$\frac{x^2 - 4x - 1}{(x - 2)^2} = 3, \quad x \neq 2.$$

On obtient :

$$x^2 - 4x - 1 = 3(x - 2)^2.$$

On développe :

$$x^2 - 4x - 1 = 3(x^2 - 4x + 4).$$

Donc :

$$x^2 - 4x - 1 = 3x^2 - 12x + 12.$$

On regroupe :

$$0 = 2x^2 - 8x + 13.$$

Le discriminant vaut :

$$\Delta = (-8)^2 - 4 \times 2 \times 13 = 64 - 104 = -40.$$

Comme $\Delta < 0$, l'équation n'a pas de solution réelle.**Conclusion.** Il n'existe aucune tangente à la courbe de f parallèle à la droite d'équation $y = 3x + 1$.**Vigilance** La condition « parallèle à $y = 3x + 1$ » ne signifie pas $f(x) = 3x + 1$. Elle signifie que les coefficients directeurs sont égaux, donc que $f'(x) = 3$.

Exercice 28

Énoncé Une entreprise modélise son bénéfice, en milliers d'euros, par

$$B(x) = -0,2x^3 + 3x^2 + 4x - 10,$$

où x est le nombre de centaines d'objets vendus.

1. Calculer $B'(x)$.
2. Calculer $B'(2)$ et $B'(8)$.
3. Interpréter le signe de ces deux résultats.

Correction.

On dérive :

$$B'(x) = -0,6x^2 + 6x + 4.$$

On calcule :

$$B'(2) = -0,6 \times 2^2 + 6 \times 2 + 4.$$

Donc :

$$B'(2) = -2,4 + 12 + 4 = 13,6.$$

On calcule :

$$B'(8) = -0,6 \times 8^2 + 6 \times 8 + 4.$$

Donc :

$$B'(8) = -38,4 + 48 + 4 = 13,6.$$

Conclusion.

$$B'(x) = -0,6x^2 + 6x + 4,$$

$$B'(2) = 13,6 \quad \text{et} \quad B'(8) = 13,6.$$

Les deux résultats sont positifs : autour de 2 centaines et de 8 centaines d'objets vendus, le bénéfice augmente localement.

Exercice 29

Énoncé On donne trois fonctions :

$$f(x) = x^2(2x - 1), \quad g(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 1}, \quad h(x) = \sqrt{5x - 2}.$$

Pour chacune, expliquer d'abord la règle de dérivation choisie, puis calculer la dérivée.

Correction.

Pour f . La fonction est un produit. On peut aussi développer :

$$f(x) = x^2(2x - 1) = 2x^3 - x^2.$$

Donc :

$$f'(x) = 6x^2 - 2x.$$

Pour g . La fonction est un quotient, dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. On pose :

$$u(x) = x^2 + 1, \quad v(x) = x + 1.$$

Alors :

$$u'(x) = 2x, \quad v'(x) = 1.$$

Donc :

$$g'(x) = \frac{2x(x+1) - (x^2+1)}{(x+1)^2}.$$

On réduit :

$$g'(x) = \frac{2x^2 + 2x - x^2 - 1}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x - 1}{(x+1)^2}.$$

Pour h . La fonction est une composée avec la racine carrée. Elle est dérivable lorsque :

$$5x - 2 > 0 \iff x > \frac{2}{5}.$$

On dérive :

$$h'(x) = \frac{5}{2\sqrt{5x-2}}.$$

Conclusion.

$$f'(x) = 6x^2 - 2x,$$

$$g'(x) = \frac{x^2 + 2x - 1}{(x+1)^2},$$

$$h'(x) = \frac{5}{2\sqrt{5x-2}}.$$

Essentiel à retenir Un même exercice peut mobiliser plusieurs règles : produit, quotient et composée. Le premier travail consiste donc à reconnaître la structure de chaque expression.

Exercice 30

Énoncé Soit

$$f(x) = x + \frac{4}{x},$$

définie sur $]0; +\infty[$.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Résoudre $f'(x) = 0$.
3. Que peut-on conjecturer pour la fonction f au voisinage de cette valeur ?

Correction.

Pour $x > 0$,

$$f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2}.$$

On résout :

$$f'(x) = 0 \iff 1 - \frac{4}{x^2} = 0.$$

Donc :

$$\frac{4}{x^2} = 1 \iff x^2 = 4.$$

Comme $x > 0$, on obtient :

$$x = 2.$$

Au voisinage de $x = 2$, la tangente est horizontale. On peut conjecturer que la fonction admet un extremum en $x = 2$.

On peut même vérifier :

$$f(2) = 2 + \frac{4}{2} = 4.$$

Conclusion.

$$f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2}.$$

La solution de $f'(x) = 0$ sur $]0; +\infty[$ est :

$$x = 2.$$

On peut conjecturer que f admet un minimum au voisinage de 2.

Vigilance L'équation $x^2 = 4$ a deux solutions dans $\mathbb{R}$, mais ici le domaine est $]0; +\infty[$. On ne garde donc que $x = 2$.

Exercice 31

Énoncé On veut construire une fonction dont la dérivée est

$$f'(x) = 3(x - 2)^2.$$

1. Proposer une fonction possible.
2. Vérifier par dérivation.
3. Expliquer pourquoi cette fonction n'est pas unique.

Correction.

On cherche une fonction dont la dérivée est :

$$3(x - 2)^2.$$

Une fonction possible est :

$$f(x) = (x - 2)^3.$$

En effet :

$$f'(x) = 3(x - 2)^2.$$

Cette fonction n'est pas unique, car on peut ajouter n'importe quelle constante. Pour tout réel c ,

$$f(x) = (x - 2)^3 + c$$

convient aussi.

Conclusion. Toutes les fonctions de la forme

$$f(x) = (x - 2)^3 + c, \quad c \in \mathbb{R},$$

conviennent.

Essentiel à retenir Quand on cherche une fonction connaissant sa dérivée, la constante additive n'est pas déterminée.

Exercice 32

Énoncé Rédiger une synthèse courte : comment choisir la bonne règle de dérivation ? Donner un exemple pour une somme, un produit, un quotient et une composée.

Correction.

Pour choisir la bonne règle de dérivation, il faut d'abord lire la structure principale de l'expression. Pour une somme, on dérive terme à terme :

$$(x^2 + 3x)' = 2x + 3.$$

Pour un produit, on utilise :

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Par exemple :

$$(x^2(3x - 1))' = 2x(3x - 1) + 3x^2.$$

Pour un quotient, on utilise :

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Pour une composée avec une fonction affine, on multiplie par la dérivée de l'intérieur :

$$((3x - 1)^4)' = 12(3x - 1)^3.$$

Conclusion. La bonne règle dépend de la structure principale : somme, produit, quotient ou composée.

Essentiel à retenir Avant tout calcul, on se demande : « Quelle est l'opération principale de l'expression ? » C'est cette réponse qui guide la règle de dérivation.