

Corrigé détaillé — TD N08

Nombre dérivé, tangente et approximation locale

Méthode Le nombre dérivé de f en a , lorsqu'il existe, est le nombre vers lequel se rapproche le quotient

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

quand h se rapproche de 0, avec $h \neq 0$.

Graphiquement, $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a .

Vigilance On ne remplace pas h par 0 dès le début, car h est au dénominateur. On garde $h \neq 0$, on simplifie, puis seulement ensuite on observe ce qui se passe lorsque h se rapproche de 0.

A — Réactivation et automatismes contextualisés

Exercice 1

Énoncé Calculer les images demandées.

a) $f(x) = x^2$, calculer $f(3)$, $f(3+h)$.

b) $g(x) = 2x^2 - 1$, calculer $g(1)$, $g(1+h)$.

c) $u(x) = \frac{1}{x}$, calculer $u(2)$, $u(2+h)$.

Correction.

a) Pour $f(x) = x^2$,

$$f(3) = 3^2 = 9.$$

De plus :

$$f(3+h) = (3+h)^2 = 9 + 6h + h^2.$$

b) Pour $g(x) = 2x^2 - 1$,

$$g(1) = 2 \times 1^2 - 1 = 1.$$

De plus :

$$g(1+h) = 2(1+h)^2 - 1 = 2(1+2h+h^2) - 1 = 1 + 4h + 2h^2.$$

c) Pour $u(x) = \frac{1}{x}$,

$$u(2) = \frac{1}{2}.$$

De plus, si $2+h \neq 0$, c'est-à-dire si $h \neq -2$,

$$u(2+h) = \frac{1}{2+h}.$$

Conclusion.

$$f(3) = 9, \quad f(3+h) = 9 + 6h + h^2,$$

$$g(1) = 1, \quad g(1+h) = 1 + 4h + 2h^2,$$

$$u(2) = \frac{1}{2}, \quad u(2+h) = \frac{1}{2+h}.$$

Exercice 2**Énoncé** Calculer et simplifier lorsque $h \neq 0$.

$$\text{a) } \frac{(2+h)^2 - 4}{h} \quad \text{b) } \frac{(1+h)^2 - 1}{h} \quad \text{c) } \frac{(3+h)^2 - 9}{h}$$

Correction.

a)

$$\frac{(2+h)^2 - 4}{h} = \frac{4 + 4h + h^2 - 4}{h} = \frac{4h + h^2}{h}.$$

Comme $h \neq 0$,

$$\frac{4h + h^2}{h} = 4 + h.$$

b)

$$\frac{(1+h)^2 - 1}{h} = \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h} = \frac{2h + h^2}{h}.$$

Comme $h \neq 0$,

$$\frac{2h + h^2}{h} = 2 + h.$$

c)

$$\frac{(3+h)^2 - 9}{h} = \frac{9 + 6h + h^2 - 9}{h} = \frac{6h + h^2}{h}.$$

Comme $h \neq 0$,

$$\frac{6h + h^2}{h} = 6 + h.$$

Conclusion.

$$\frac{(2+h)^2 - 4}{h} = 4 + h, \quad \frac{(1+h)^2 - 1}{h} = 2 + h, \quad \frac{(3+h)^2 - 9}{h} = 6 + h.$$

Vigilance On simplifie par h uniquement parce que l'énoncé précise $h \neq 0$. Avant simplification, il est interdit de remplacer h par 0, car h est au dénominateur.**Exercice 3****Énoncé** Sur la figure, déterminer le coefficient directeur de la sécante (AB) , puis celui de la sécante (AC) .**Correction.**

Par lecture graphique, on lit approximativement :

$$A(1; -1), \quad B(3; 0), \quad C(5; 2).$$

Le coefficient directeur de la sécante (AB) est :

$$\frac{0 - (-1)}{3 - 1} = \frac{1}{2}.$$

Le coefficient directeur de la sécante (AC) est :

$$\frac{2 - (-1)}{5 - 1} = \frac{3}{4}.$$

Conclusion.

$$m_{AB} \approx \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad m_{AC} \approx \frac{3}{4}.$$

Les valeurs sont approchées car elles sont lues sur un graphique.

Vigilance Les coefficients directeurs sont lus sur des sécantes, donc à partir de deux points. Comme les coordonnées sont lues graphiquement, les valeurs obtenues sont approchées.

Exercice 4

Énoncé Compléter.

Le taux de variation de f entre a et $a + h$ est $\dots$. Si ce quotient se rapproche d'un nombre réel quand h se rapproche de 0, ce nombre est noté $\dots$.

Correction.

Le taux de variation de f entre a et $a + h$ est :

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{(a+h) - a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

avec $h \neq 0$.

Si ce quotient se rapproche d'un nombre réel quand h se rapproche de 0, ce nombre est noté :

$$f'(a).$$

Conclusion. Le quotient est

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

et le nombre limite, s'il existe, est noté $f'(a)$.

Essentiel à retenir Le quotient

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

est d'abord un taux de variation entre deux abscisses distinctes a et $a + h$. Le nombre dérivé $f'(a)$, lorsqu'il existe, est la valeur vers laquelle ce quotient se rapproche lorsque h se rapproche de 0.

Exercice 5

Énoncé Pour chaque quotient, indiquer le nombre vers lequel il se rapproche lorsque h se rapproche de 0.

$$\text{a) } 3 + h \quad \text{b) } -5 + 2h \quad \text{c) } 4 - h^2 \quad \text{d) } 1 + \frac{h}{2}$$

Correction.

Quand h se rapproche de 0,

$3 + h$ se rapproche de 3.

$-5 + 2h$ se rapproche de -5 .

$4 - h^2$ se rapproche de 4.

$$1 + \frac{h}{2} \text{ se rapproche de } 1.$$

Conclusion. Les nombres obtenus sont :

$$3, \quad -5, \quad 4, \quad 1.$$

Essentiel à retenir Lorsqu'une expression dépend de h , on regarde ce qu'elle devient lorsque h se rapproche de 0. Les termes contenant h , h^2 , etc. deviennent alors proches de 0.

Exercice 6

Énoncé Une voiture parcourt 150 m entre les instants $t = 4$ s et $t = 10$ s. Calculer sa vitesse moyenne en m/s.

Correction.

La durée du trajet est :

$$10 - 4 = 6$$

secondes.

La vitesse moyenne est donc :

$$\frac{150}{6} = 25.$$

Conclusion. La vitesse moyenne est de 25 m/s.

Exercice 7

Énoncé Vrai ou faux ? Justifier brièvement.

1. Un nombre dérivé est une pente locale.
2. Une sécante et une tangente sont toujours la même droite.
3. Dans $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$, on peut prendre $h = 0$ dès le début.

Correction.

1. Vrai. Le nombre dérivé $f'(a)$ est la pente de la tangente à la courbe au point d'abscisse a .
2. Faux. Une sécante passe par deux points de la courbe, tandis qu'une tangente décrit la direction locale de la courbe en un point.
3. Faux. On ne peut pas prendre $h = 0$ dès le début, car h est au dénominateur.

Conclusion. Les réponses sont :

$$\text{vrai,} \quad \text{faux,} \quad \text{faux.}$$

Erreur type Dans

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

prendre $h = 0$ dès le départ conduirait à une division par 0. La méthode correcte est : garder $h \neq 0$, simplifier, puis observer la valeur approchée lorsque h se rapproche de 0.

B — Applications directes

Exercice 8

Énoncé Pour $f(x) = x^2$, calculer

$$\frac{f(2+h) - f(2)}{h},$$

avec $h \neq 0$. En déduire $f'(2)$.

Correction.

On a :

$$f(2) = 4.$$

De plus :

$$f(2+h) = (2+h)^2 = 4 + 4h + h^2.$$

Donc :

$$\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{4 + 4h + h^2 - 4}{h} = \frac{4h + h^2}{h}.$$

Comme $h \neq 0$,

$$\frac{4h + h^2}{h} = 4 + h.$$

Quand h se rapproche de 0, $4 + h$ se rapproche de 4.

Conclusion.

$$f'(2) = 4.$$

Essentiel à retenir Pour calculer un nombre dérivé avec la définition, on suit toujours le même schéma :

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \longrightarrow \text{simplification} \longrightarrow h \text{ se rapproche de } 0.$$

Exercice 9

Énoncé Pour $f(x) = x^2$, calculer $f'(3)$ avec la définition du nombre dérivé.

Correction.

On calcule :

$$\frac{f(3+h) - f(3)}{h}.$$

On a :

$$f(3) = 9$$

et

$$f(3+h) = (3+h)^2 = 9 + 6h + h^2.$$

Donc :

$$\frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \frac{9 + 6h + h^2 - 9}{h} = \frac{6h + h^2}{h}.$$

Comme $h \neq 0$,

$$\frac{6h + h^2}{h} = 6 + h.$$

Quand h se rapproche de 0, $6 + h$ se rapproche de 6.

Conclusion.

$$f'(3) = 6.$$

Exercice 10

Énoncé Pour $g(x) = 2x^2 - 5$, calculer

$$\frac{g(-1+h) - g(-1)}{h},$$

avec $h \neq 0$. En déduire $g'(-1)$.

Correction.

On calcule :

$$g(-1) = 2(-1)^2 - 5 = 2 - 5 = -3.$$

De plus :

$$g(-1+h) = 2(-1+h)^2 - 5.$$

Or :

$$(-1+h)^2 = 1 - 2h + h^2.$$

Donc :

$$g(-1+h) = 2(1 - 2h + h^2) - 5 = 2 - 4h + 2h^2 - 5 = -3 - 4h + 2h^2.$$

Ainsi :

$$\frac{g(-1+h) - g(-1)}{h} = \frac{-3 - 4h + 2h^2 - (-3)}{h} = \frac{-4h + 2h^2}{h}.$$

Comme $h \neq 0$,

$$\frac{-4h + 2h^2}{h} = -4 + 2h.$$

Quand h se rapproche de 0, $-4 + 2h$ se rapproche de -4 .

Conclusion.

$$g'(-1) = -4.$$

Exercice 11

Énoncé Pour $u(x) = \frac{1}{x}$, calculer

$$\frac{u(2+h) - u(2)}{h},$$

avec $h \neq 0$ et $h \neq -2$. En déduire $u'(2)$.

Correction.

On a :

$$u(2) = \frac{1}{2}$$

et :

$$u(2+h) = \frac{1}{2+h}.$$

Donc :

$$\frac{u(2+h) - u(2)}{h} = \frac{\frac{1}{2+h} - \frac{1}{2}}{h}.$$

On met au même dénominateur :

$$\frac{1}{2+h} - \frac{1}{2} = \frac{2 - (2+h)}{2(2+h)} = \frac{-h}{2(2+h)}.$$

Ainsi :

$$\frac{u(2+h) - u(2)}{h} = \frac{\frac{-h}{2(2+h)}}{h}.$$

Comme $h \neq 0$,

$$\frac{\frac{-h}{2(2+h)}}{h} = -\frac{1}{2(2+h)}.$$

Quand h se rapproche de 0,

$$-\frac{1}{2(2+h)}$$

se rapproche de :

$$-\frac{1}{2 \times 2} = -\frac{1}{4}.$$

Conclusion.

$$u'(2) = -\frac{1}{4}.$$

Vigilance Dans cet exercice, il y a deux restrictions :

$$h \neq 0$$

car h est au dénominateur du taux de variation, et

$$h \neq -2$$

car $u(2+h) = \frac{1}{2+h}$ doit être défini.

Exercice 12

Énoncé On sait que, pour tout $h \neq 0$,

$$\frac{f(4+h) - f(4)}{h} = 7 + 2h.$$

La fonction f est-elle dérivable en 4 ? Si oui, donner $f'(4)$.

Correction.

On observe le comportement du quotient lorsque h se rapproche de 0.

Comme :

$$7 + 2h \longrightarrow 7$$

lorsque h se rapproche de 0, le quotient admet une limite réelle.

Conclusion. La fonction f est dérivable en 4, et

$$f'(4) = 7.$$

Essentiel à retenir Pour montrer qu'une fonction est dérivable en a , il suffit ici d'observer que le quotient fourni se rapproche d'un nombre réel lorsque h se rapproche de 0. Ce nombre est alors $f'(a)$.

Exercice 13

Énoncé On sait que, pour tout $h \neq 0$,

$$\frac{g(-2+h) - g(-2)}{h} = -3 + \frac{h}{2}.$$

Peut-on déterminer $g'(-2)$? Justifier.

Correction.

On observe le comportement du quotient lorsque h se rapproche de 0.

Comme :

$$-3 + \frac{h}{2} \rightarrow -3$$

lorsque h se rapproche de 0, le quotient admet une limite réelle.

Conclusion. On peut déterminer $g'(-2)$, et

$$g'(-2) = -3.$$

Vigilance La question ne demande pas de retrouver l'expression de g . On utilise uniquement le quotient donné :

$$\frac{g(-2+h) - g(-2)}{h}.$$

S'il se rapproche d'un nombre réel, on peut déterminer $g'(-2)$.

Exercice 14

Énoncé Sur le graphique, les droites tracées sont les tangentes à la courbe aux points A , B et C . Lire graphiquement $f'(-3)$, $f'(0)$ et $f'(4)$.

Correction.

On lit les pentes sur les tangentes, et non directement sur la courbe.

Par lecture graphique, on obtient approximativement :

$$f'(-3) \approx 1,$$

$$f'(0) \approx 0,$$

$$f'(4) \approx -\frac{1}{2}.$$

Conclusion.

$$f'(-3) \approx 1, \quad f'(0) \approx 0, \quad f'(4) \approx -\frac{1}{2}.$$

Ces valeurs sont approchées car elles sont lues sur le graphique.

Vigilance Pour lire un nombre dérivé sur un graphique, on lit la pente de la tangente, pas la pente de la courbe elle-même. Il faut donc choisir deux points lisibles sur la tangente tracée.

Exercice 15

Énoncé Une tangente passe par les points $A(1; 3)$ et $B(4; 9)$. Déterminer le nombre dérivé correspondant.

Correction.

Le nombre dérivé correspondant est le coefficient directeur de la tangente.

On calcule :

$$\frac{9 - 3}{4 - 1} = \frac{6}{3} = 2.$$

Conclusion. Le nombre dérivé correspondant vaut 2.

Exercice 16

Énoncé On sait que $f(0) = 4$ et $f'(0) = -7$. Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0.

Correction.

La tangente au point d'abscisse 0 passe par le point :

$$(0; f(0)) = (0; 4).$$

Son coefficient directeur est :

$$f'(0) = -7.$$

Une équation de la tangente est donc :

$$y = f'(0)(x - 0) + f(0).$$

Ainsi :

$$y = -7x + 4.$$

Conclusion. L'équation réduite de la tangente est :

$$y = -7x + 4.$$

Essentiel à retenir L'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a est :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

Ici, avec $a = 0$, cette formule devient :

$$y = f'(0)x + f(0).$$

C — Entraînement approfondi**Exercice 17**

Énoncé Soit $f(x) = x^2 - 3x + 2$. Calculer

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h},$$

avec $h \neq 0$, puis en déduire $f'(1)$.

Correction.

On calcule :

$$f(1) = 1^2 - 3 \times 1 + 2 = 0.$$

De plus :

$$f(1+h) = (1+h)^2 - 3(1+h) + 2.$$

On développe :

$$f(1+h) = 1 + 2h + h^2 - 3 - 3h + 2 = h^2 - h.$$

Donc :

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{h^2 - h - 0}{h}.$$

Comme $h \neq 0$,

$$\frac{h^2 - h}{h} = h - 1.$$

Quand h se rapproche de 0, $h - 1$ se rapproche de -1 .

Conclusion.

$$f'(1) = -1.$$

Exercice 18

Énoncé Soit $f(x) = x^3$. Calculer

$$\frac{f(2+h) - f(2)}{h},$$

avec $h \neq 0$, puis en déduire $f'(2)$.

Correction.

On a :

$$f(2) = 8.$$

De plus :

$$f(2+h) = (2+h)^3.$$

On développe :

$$(2+h)^3 = 8 + 12h + 6h^2 + h^3.$$

Donc :

$$\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{8 + 12h + 6h^2 + h^3 - 8}{h} = \frac{12h + 6h^2 + h^3}{h}.$$

Comme $h \neq 0$,

$$\frac{12h + 6h^2 + h^3}{h} = 12 + 6h + h^2.$$

Quand h se rapproche de 0, $12 + 6h + h^2$ se rapproche de 12.

Conclusion.

$$f'(2) = 12.$$

Exercice 19

Énoncé Soit $f(x) = \sqrt{x}$, définie sur $[0; +\infty[$. Pour $h > 0$, calculer

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h}.$$

Peut-on dire que f est dérivable en 0? Justifier.

Correction.

On a :

$$f(0) = \sqrt{0} = 0.$$

Pour $h > 0$,

$$f(0+h) = f(h) = \sqrt{h}.$$

Donc :

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{\sqrt{h} - 0}{h} = \frac{\sqrt{h}}{h}.$$

Comme $h = (\sqrt{h})^2$, on obtient :

$$\frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}}.$$

Lorsque h se rapproche de 0 par valeurs positives, $\sqrt{h}$ se rapproche de 0, donc :

$$\frac{1}{\sqrt{h}}$$

devient de plus en plus grand et ne se rapproche pas d'un nombre réel.

Conclusion. La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0, car le quotient ne se rapproche pas d'un nombre réel fini.

Erreur type Une fonction peut être définie en un point sans être dérivable en ce point. Ici, $\sqrt{x}$ est définie en 0, mais le quotient

$$\frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}}$$

ne se rapproche pas d'un nombre réel fini lorsque h se rapproche de 0 par valeurs positives.

Exercice 20

Énoncé La droite T est tangente à la courbe au point A . Déterminer $f(2)$ et $f'(2)$, puis écrire une équation possible de T .

Correction.

Par lecture graphique, le point de tangence a pour abscisse 2. On lit approximativement :

$$A(2; 3).$$

Donc :

$$f(2) \approx 3.$$

La droite tangente T semble avoir pour coefficient directeur environ -1 . Ainsi :

$$f'(2) \approx -1.$$

Une équation possible de T , passant par $A(2; 3)$ et de pente -1 , est :

$$y = -1(x - 2) + 3.$$

Donc :

$$y = -x + 5.$$

Conclusion.

$$f(2) \approx 3, \quad f'(2) \approx -1.$$

Une équation possible de la tangente est :

$$y = -x + 5.$$

Vigilance Les valeurs $f(2)$ et $f'(2)$ sont lues graphiquement. La valeur de $f(2)$ se lit sur la courbe, tandis que $f'(2)$ se lit sur la tangente.

Exercice 21

Énoncé On sait que $f(3) = 2$ et $f'(3) = -4$. Donner l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 3.

Correction.

La tangente au point d'abscisse 3 passe par le point :

$$(3; f(3)) = (3; 2).$$

Son coefficient directeur est :

$$f'(3) = -4.$$

Une équation de la tangente est :

$$y = f'(3)(x - 3) + f(3).$$

Donc :

$$y = -4(x - 3) + 2.$$

On développe :

$$y = -4x + 12 + 2 = -4x + 14.$$

Conclusion. L'équation de la tangente est :

$$y = -4x + 14.$$

Essentiel à retenir Connaître $f(a)$ et $f'(a)$ suffit pour écrire l'équation de la tangente au point d'abscisse a :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

Exercice 22

Énoncé Soit $f(x) = x^2 + 2x - 1$. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1.

Correction.

On calcule :

$$f(1) = 1^2 + 2 \times 1 - 1 = 2.$$

Calculons le nombre dérivé en 1.

$$f(1+h) = (1+h)^2 + 2(1+h) - 1.$$

On développe :

$$f(1+h) = 1 + 2h + h^2 + 2 + 2h - 1 = 2 + 4h + h^2.$$

Donc :

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{2 + 4h + h^2 - 2}{h} = \frac{4h + h^2}{h}.$$

Comme $h \neq 0$,

$$\frac{4h + h^2}{h} = 4 + h.$$

Quand h se rapproche de 0, $4 + h$ se rapproche de 4. Donc :

$$f'(1) = 4.$$

L'équation de la tangente est :

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1).$$

Ainsi :

$$y = 4(x - 1) + 2 = 4x - 2.$$

Conclusion. L'équation de la tangente est :

$$y = 4x - 2.$$

Exercice 23

Énoncé Soit $f(x) = x^2 - 4x + 5$. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 2. Que remarque-t-on ?

Correction.

On calcule :

$$f(2) = 2^2 - 4 \times 2 + 5 = 4 - 8 + 5 = 1.$$

Calculons le nombre dérivé en 2.

$$f(2+h) = (2+h)^2 - 4(2+h) + 5.$$

On développe :

$$f(2+h) = 4 + 4h + h^2 - 8 - 4h + 5 = 1 + h^2.$$

Donc :

$$\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{1 + h^2 - 1}{h} = \frac{h^2}{h}.$$

Comme $h \neq 0$,

$$\frac{h^2}{h} = h.$$

Quand h se rapproche de 0, h se rapproche de 0. Donc :

$$f'(2) = 0.$$

L'équation de la tangente est :

$$y = f'(2)(x - 2) + f(2).$$

Donc :

$$y = 0(x - 2) + 1,$$

c'est-à-dire :

$$y = 1.$$

Conclusion. L'équation de la tangente est :

$$y = 1.$$

On remarque que la tangente est horizontale.

Essentiel à retenir Lorsque $f'(a) = 0$, la tangente au point d'abscisse a est horizontale. Son équation est alors de la forme :

$$y = f(a).$$

Exercice 24

Énoncé Un élève écrit : « $f'(a) = 0$, donc la fonction est constante. » Expliquer pourquoi cette phrase est insuffisante. Proposer une formulation correcte.

Correction.

La phrase est insuffisante, car $f'(a) = 0$ donne seulement une information locale au point d'abscisse a . Cela signifie que la tangente à la courbe au point d'abscisse a est horizontale.

Cela ne signifie pas que la fonction est constante sur tout un intervalle.

Une formulation correcte est :

Si $f'(a) = 0$, alors la tangente à la courbe au point d'abscisse a est horizontale.

Conclusion. $f'(a) = 0$ signifie une tangente horizontale en a , pas une fonction constante.

Erreur type L'égalité $f'(a) = 0$ ne signifie pas que f est constante. Elle signifie seulement que la tangente en a est horizontale. Pour conclure qu'une fonction est constante sur un intervalle, il faut une information sur tous les points de cet intervalle, pas seulement sur un point.

D — Synthèse, problèmes et prises d'initiative

Exercice 25

Énoncé Approximation locale. On remplace localement la courbe par sa tangente au voisinage de a . Expliquer graphiquement pourquoi

$$f(a+h) \approx f(a) + hf'(a).$$

Correction.

Au voisinage de a , la tangente donne une approximation de la courbe.

La tangente au point d'abscisse a passe par le point :

$$(a; f(a)).$$

Son coefficient directeur est :

$$f'(a).$$

Si l'on augmente l'abscisse de h , l'ordonnée sur la tangente augmente environ de :

$$hf'(a).$$

Donc l'ordonnée de la tangente au point d'abscisse $a+h$ est :

$$f(a) + hf'(a).$$

Comme la courbe est proche de sa tangente au voisinage de a , on obtient :

$$f(a+h) \approx f(a) + hf'(a).$$

Conclusion. L'approximation affine locale est :

$$f(a+h) \approx f(a) + hf'(a).$$

Essentiel à retenir L'approximation affine locale consiste à remplacer la courbe par sa tangente au voisinage de a . La formule à retenir est :

$$f(a+h) \approx f(a) + hf'(a).$$

Elle est pertinente seulement pour des valeurs de h proches de 0.

Exercice 26

Énoncé On sait que $f(5) = 10$ et $f'(5) = 3$. Utiliser l'approximation affine locale pour estimer $f(5,02)$, puis $f(4,98)$.

Correction.

On utilise :

$$f(a+h) \approx f(a) + hf'(a).$$

Ici :

$$a = 5, \quad f(5) = 10, \quad f'(5) = 3.$$

Pour $5,02 = 5 + 0,02$, on a $h = 0,02$. Donc :

$$f(5,02) \approx 10 + 0,02 \times 3 = 10 + 0,06 = 10,06.$$

Pour $4,98 = 5 - 0,02$, on a $h = -0,02$. Donc :

$$f(4,98) \approx 10 - 0,02 \times 3 = 10 - 0,06 = 9,94.$$

Conclusion.

$$f(5,02) \approx 10,06 \quad \text{et} \quad f(4,98) \approx 9,94.$$

Vigilance Dans l'approximation affine locale, le signe de h compte. Pour 5,02, on a $h = 0,02$. Pour 4,98, on a $h = -0,02$.

Exercice 27

Énoncé Soit $f(x) = x^2$. Utiliser la tangente à la courbe au point d'abscisse 10 pour donner une approximation de $10,1^2$. Comparer avec la valeur exacte.

Correction.

On considère :

$$f(x) = x^2.$$

On sait :

$$f(10) = 100.$$

Pour la fonction carré, on a :

$$f'(10) = 20.$$

On utilise l'approximation affine locale avec :

$$a = 10 \quad \text{et} \quad h = 0,1.$$

Alors :

$$f(10,1) \approx f(10) + 0,1f'(10).$$

Donc :

$$10,1^2 \approx 100 + 0,1 \times 20 = 102.$$

La valeur exacte est :

$$10,1^2 = 102,01.$$

Conclusion. L'approximation donne :

$$10,1^2 \approx 102.$$

La valeur exacte est :

$$102,01.$$

L'erreur est donc 0,01.

Vigilance L'approximation obtenue avec la tangente n'est pas une valeur exacte. Elle est d'autant plus fiable que l'on reste proche du point de tangence. Ici, 10,1 est proche de 10, donc l'approximation est pertinente.

Exercice 28

Énoncé Le déplacement d'un mobile sur un axe est modélisé par

$$x(t) = \frac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 9t + 2,$$

pour $0 \leq t \leq 6$, où t est en secondes et $x(t)$ en centimètres.

1. Calculer la vitesse moyenne entre $t = 0$ et $t = 6$.
2. Déterminer la vitesse instantanée $v(t) = x'(t)$.
3. Calculer $v(4)$.
4. Le mobile s'arrête-t-il à un instant du parcours ?

Correction.

1. On calcule :

$$x(0) = 2.$$

Puis :

$$x(6) = \frac{1}{3} \times 6^3 - 3 \times 6^2 + 9 \times 6 + 2.$$

Donc :

$$x(6) = 72 - 108 + 54 + 2 = 20.$$

La vitesse moyenne entre 0 et 6 secondes est :

$$\frac{x(6) - x(0)}{6 - 0} = \frac{20 - 2}{6} = 3.$$

Elle vaut donc 3 cm/s.

2. On dérive :

$$x(t) = \frac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 9t + 2.$$

Ainsi :

$$x'(t) = t^2 - 6t + 9.$$

Donc :

$$v(t) = t^2 - 6t + 9 = (t - 3)^2.$$

3.

$$v(4) = 4^2 - 6 \times 4 + 9 = 16 - 24 + 9 = 1.$$

Donc :

$$v(4) = 1 \text{ cm/s.}$$

4. Le mobile s'arrête lorsque :

$$v(t) = 0.$$

On résout :

$$(t - 3)^2 = 0 \iff t = 3.$$

Comme $3 \in [0; 6]$, le mobile s'arrête bien à un instant du parcours.

Conclusion. La vitesse moyenne entre 0 et 6 s vaut 3 cm/s. La vitesse instantanée est :

$$v(t) = (t - 3)^2.$$

On a :

$$v(4) = 1 \text{ cm/s.}$$

Le mobile s'arrête à l'instant $t = 3$ s.

Essentiel à retenir Dans un problème de mouvement, la dérivée de la position est la vitesse instantanée :

$$v(t) = x'(t).$$

Le mobile s'arrête lorsque sa vitesse instantanée est nulle, c'est-à-dire lorsque :

$$v(t) = 0.$$

Exercice 29

Énoncé Le graphique représente la position d'un mobile. Expliquer la différence entre vitesse moyenne sur $[0;6]$ et vitesse instantanée en un instant donné.

Correction.

La vitesse moyenne sur $[0;6]$ compare la position du mobile à l'instant 0 et à l'instant 6. Elle correspond à la pente de la sécante reliant les deux points extrêmes de la courbe.

La vitesse instantanée en un instant donné décrit le comportement du mobile à cet instant précis. Elle correspond à la pente de la tangente à la courbe en ce point.

Conclusion. La vitesse moyenne est une information globale sur un intervalle. La vitesse instantanée est une information locale en un instant.

Essentiel à retenir La vitesse moyenne correspond à la pente d'une sécante. La vitesse instantanée correspond à la pente d'une tangente. Ces deux informations peuvent être très différentes si le mouvement n'est pas uniforme.

Exercice 30

Énoncé Soit

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 1.$$

On cherche les points de la courbe où la tangente est parallèle à la droite d'équation

$$y = x + 4.$$

1. Traduire la condition sur le nombre dérivé.
2. Déterminer les abscisses possibles.
3. Donner les points correspondants.

Correction.

La droite d'équation :

$$y = x + 4$$

a pour coefficient directeur 1.

La tangente à la courbe de f au point d'abscisse x est parallèle à cette droite si et seulement si :

$$f'(x) = 1.$$

On calcule :

$$f'(x) = 3x^2 - 4x.$$

On résout donc :

$$3x^2 - 4x = 1.$$

On obtient l'équation équivalente :

$$3x^2 - 4x - 1 = 0.$$

Son discriminant est :

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 3 \times (-1) = 16 + 12 = 28.$$

Donc :

$$x = \frac{4 - \sqrt{28}}{6} \quad \text{ou} \quad x = \frac{4 + \sqrt{28}}{6}.$$

Comme $\sqrt{28} = 2\sqrt{7}$, on obtient :

$$x = \frac{2 - \sqrt{7}}{3} \quad \text{ou} \quad x = \frac{2 + \sqrt{7}}{3}.$$

Les points correspondants sont les points de la courbe dont les abscisses sont ces deux valeurs.

Conclusion. Les abscisses possibles sont :

$$\frac{2 - \sqrt{7}}{3} \quad \text{et} \quad \frac{2 + \sqrt{7}}{3}.$$

Les points correspondants sont :

$$\left(\frac{2 - \sqrt{7}}{3}; f\left(\frac{2 - \sqrt{7}}{3}\right) \right) \quad \text{et} \quad \left(\frac{2 + \sqrt{7}}{3}; f\left(\frac{2 + \sqrt{7}}{3}\right) \right).$$

Vigilance Deux droites parallèles ont le même coefficient directeur. Chercher une tangente parallèle à la droite $y = x + 4$ revient donc à résoudre :

$$f'(x) = 1,$$

et non à résoudre $f(x) = x + 4$.

Exercice 31

Énoncé Soit

$$f(x) = x^2 + 5x - 4.$$

On cherche les tangentes à la courbe de f passant par le point $P(1; -7)$.

1. Écrire l'équation de la tangente au point d'abscisse a .
2. Traduire le fait que cette tangente passe par P .
3. Déterminer les valeurs possibles de a .

Correction.

On calcule :

$$f'(x) = 2x + 5.$$

Au point d'abscisse a , on a :

$$f(a) = a^2 + 5a - 4$$

et

$$f'(a) = 2a + 5.$$

L'équation de la tangente au point d'abscisse a est :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

Donc :

$$y = (2a + 5)(x - a) + a^2 + 5a - 4.$$

Cette tangente passe par $P(1; -7)$ si et seulement si :

$$-7 = (2a + 5)(1 - a) + a^2 + 5a - 4.$$

On développe :

$$(2a + 5)(1 - a) = 2a + 5 - 2a^2 - 5a = -2a^2 - 3a + 5.$$

Donc :

$$-7 = -2a^2 - 3a + 5 + a^2 + 5a - 4.$$

Ainsi :

$$-7 = -a^2 + 2a + 1.$$

On obtient :

$$0 = -a^2 + 2a + 8.$$

C'est-à-dire :

$$a^2 - 2a - 8 = 0.$$

On factorise :

$$a^2 - 2a - 8 = (a - 4)(a + 2).$$

Donc :

$$(a - 4)(a + 2) = 0 \iff a = 4 \quad \text{ou} \quad a = -2.$$

Conclusion. Il existe deux tangentes passant par $P(1; -7)$, obtenues pour :

$$a = 4 \quad \text{ou} \quad a = -2.$$

Vigilance Le point $P(1; -7)$ n'est pas nécessairement le point de tangence. On cherche une tangente à la courbe en un point d'abscisse a , puis on impose que cette droite passe par P .

Exercice 32

Énoncé Rédiger une courte synthèse : expliquer la différence entre taux de variation, nombre dérivé, tangente et approximation affine locale. Utiliser au moins une formule et une interprétation graphique.

Correction.

Le taux de variation entre a et b est :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Il représente une pente moyenne entre deux points de la courbe, donc la pente d'une sécante.

Le nombre dérivé $f'(a)$ est une pente locale : c'est la pente de la tangente à la courbe au point d'abscisse a . Il s'obtient en observant le comportement de

$$\frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

quand h se rapproche de 0.

La tangente est une droite qui donne la direction locale de la courbe au voisinage du point étudié.

L'approximation affine locale consiste à remplacer la courbe par sa tangente près de a . On utilise alors :

$$f(a + h) \approx f(a) + hf'(a).$$

Conclusion. Le taux de variation décrit une évolution moyenne ; le nombre dérivé décrit une évolution locale ; la tangente représente graphiquement cette pente locale ; l'approximation affine locale utilise cette tangente pour estimer des valeurs proches.

Essentiel à retenir

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

donne une pente moyenne entre deux points de la courbe.

$$f'(a)$$

donne une pente locale au point d'abscisse a .

La tangente représente graphiquement cette pente locale, et l'approximation affine locale utilise cette tangente pour estimer les valeurs proches :

$$f(a + h) \approx f(a) + hf'(a).$$