

## Corrigé détaillé — TD N07

### Taux de variation, pente et sécantes

**Méthode** Le taux de variation d'une fonction  $f$  entre deux réels distincts  $a$  et  $b$  est :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Il faut toujours écrire les différences dans le même ordre : image d'arrivée moins image de départ, puis abscisse d'arrivée moins abscisse de départ.

**Vigilance** Une pente moyenne ne décrit pas forcément tout le comportement de la fonction entre deux points. Elle résume seulement l'évolution globale entre les deux abscisses choisies.

## A — Réactivation et automatismes contextualisés

### Exercice 1

**Énoncé** Calculer les images demandées.

1.  $f(x) = 2x + 1$ , calculer  $f(3)$ .
2.  $g(x) = x^2 - 4$ , calculer  $g(-2)$ .
3.  $h(x) = 5 - 3x$ , calculer  $h(4)$ .
4.  $p(x) = x^2 + x$ , calculer  $p(2)$ .

**Correction.**

$$f(3) = 2 \times 3 + 1 = 7.$$

$$g(-2) = (-2)^2 - 4 = 4 - 4 = 0.$$

$$h(4) = 5 - 3 \times 4 = 5 - 12 = -7.$$

$$p(2) = 2^2 + 2 = 4 + 2 = 6.$$

**Conclusion.**

$$f(3) = 7, \quad g(-2) = 0, \quad h(4) = -7, \quad p(2) = 6.$$

### Exercice 2

**Énoncé** Calculer chaque différence :

$$5 - 2, \quad 1 - 4, \quad -3 - 2, \quad 2 - (-1).$$

**Correction.**

$$5 - 2 = 3.$$

$$1 - 4 = -3.$$

$$-3 - 2 = -5.$$

$$2 - (-1) = 2 + 1 = 3.$$

**Conclusion.**

$$3, \quad -3, \quad -5, \quad 3.$$

### Exercice 3

**Énoncé** On donne le tableau :

| $x$    | 0 | 1 | 3 | 4 |
|--------|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 2 | 5 | 9 | 6 |

Calculer  $f(3) - f(1)$ ,  $3 - 1$ , puis le quotient

$$\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1}.$$

**Correction.**

D'après le tableau :

$$f(3) = 9 \quad \text{et} \quad f(1) = 5.$$

Donc :

$$f(3) - f(1) = 9 - 5 = 4.$$

De plus :

$$3 - 1 = 2.$$

Ainsi :

$$\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{4}{2} = 2.$$

**Conclusion.**

$$f(3) - f(1) = 4, \quad 3 - 1 = 2, \quad \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = 2.$$

**Essentiel à retenir** Le numérateur mesure l'accroissement de l'image :

$$f(3) - f(1).$$

Le dénominateur mesure l'accroissement de la variable :

$$3 - 1.$$

Le quotient compare ces deux accroissements.

### Exercice 4

**Énoncé** Compléter.

1. Entre  $a$  et  $b$ , l'accroissement de la variable est ...
2. L'accroissement de l'image est ...
3. Le taux de variation est le quotient ...

**Correction.**

Entre  $a$  et  $b$ , l'accroissement de la variable est :

$$b - a.$$

L'accroissement de l'image est :

$$f(b) - f(a).$$

Le taux de variation est le quotient :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

avec  $a \neq b$ .

**Conclusion.**

accroissement de la variable :  $b - a$ ,

accroissement de l'image :  $f(b) - f(a)$ ,

taux de variation :  $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ .

**Vigilance** Le quotient n'a de sens que si  $a \neq b$ . Sinon, le dénominateur  $b - a$  serait nul.

## Exercice 5

**Énoncé** Sur chaque droite, dire si la pente est positive, négative ou nulle.

**Correction.**

La droite  $d_1$  monte quand on se déplace de gauche à droite. Sa pente est donc positive.

La droite  $d_2$  descend quand on se déplace de gauche à droite. Sa pente est donc négative.

La droite  $d_3$  est horizontale. Sa pente est donc nulle.

**Conclusion.**

$d_1$  : pente positive,  $d_2$  : pente négative,  $d_3$  : pente nulle.

**Essentiel à retenir** Une pente positive correspond à une droite qui monte de gauche à droite. Une pente négative correspond à une droite qui descend. Une pente nulle correspond à une droite horizontale.

## Exercice 6

**Énoncé** Une distance passe de 12 km à 30 km entre 9 h et 12 h. Calculer la vitesse moyenne et préciser son unité.

**Correction.**

L'accroissement de la distance est :

$$30 - 12 = 18.$$

L'accroissement du temps est :

$$12 - 9 = 3.$$

La vitesse moyenne est donc :

$$\frac{30 - 12}{12 - 9} = \frac{18}{3} = 6.$$

**Conclusion.** La vitesse moyenne est de 6 km/h.

**Vigilance** L'unité du taux de variation dépend des grandeurs. Ici, on divise une distance en kilomètres par une durée en heures, donc l'unité est le km/h.

## Exercice 7

**Énoncé** Vrai ou faux ? Justifier brièvement.

1. Un taux de variation est toujours positif.
2. Si  $f(a) = f(b)$ , alors le taux de variation entre  $a$  et  $b$  est nul.
3. Un taux de variation est une image de la fonction.

**Correction.**

1. Faux. Un taux de variation peut être négatif, par exemple lorsque les images diminuent.
2. Vrai, si  $a \neq b$ . En effet :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{0}{b - a} = 0.$$

3. Faux. Un taux de variation n'est pas une image de la fonction : c'est un quotient qui compare deux accroissements.

**Conclusion.** Les réponses sont :

faux,      vrai,      faux.

**Erreur type** Dire qu'un taux de variation est une image est une confusion fréquente. Une image est une valeur  $f(x)$ . Un taux de variation est un quotient :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

## B — Applications directes

### Exercice 8

**Énoncé** Calculer le taux de variation de  $f$ .

1.  $f(x) = 3x - 2$ , entre 1 et 5.
2.  $f(x) = x^2$ , entre 2 et 4.
3.  $f(x) = x^2 - 3x + 1$ , entre 0 et 3.
4.  $f(x) = \frac{1}{x}$ , entre 1 et 4.

**Correction.**

1. On calcule :

$$f(1) = 3 \times 1 - 2 = 1 \quad \text{et} \quad f(5) = 3 \times 5 - 2 = 13.$$

Donc :

$$\frac{f(5) - f(1)}{5 - 1} = \frac{13 - 1}{4} = 3.$$

2. On calcule :

$$f(2) = 4 \quad \text{et} \quad f(4) = 16.$$

Donc :

$$\frac{f(4) - f(2)}{4 - 2} = \frac{16 - 4}{2} = 6.$$

3. On calcule :

$$f(0) = 1 \quad \text{et} \quad f(3) = 9 - 9 + 1 = 1.$$

Donc :

$$\frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \frac{1 - 1}{3} = 0.$$

4. On calcule :

$$f(1) = 1 \quad \text{et} \quad f(4) = \frac{1}{4}.$$

Donc :

$$\frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{\frac{1}{4} - 1}{3} = \frac{-\frac{3}{4}}{3} = -\frac{1}{4}.$$

**Conclusion.** Les taux de variation sont :

$$3, \quad 6, \quad 0, \quad -\frac{1}{4}.$$

**Essentiel à retenir** Pour chaque calcul, on suit le même schéma :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Changer l'ordre au numérateur impose de changer aussi l'ordre au dénominateur.

## Exercice 9

**Énoncé** Pour  $f(x) = 2x + 5$ , calculer le taux de variation entre 0 et 3, puis entre  $-2$  et 4. Que remarque-t-on ?

**Correction.**

Entre 0 et 3 :

$$f(0) = 5 \quad \text{et} \quad f(3) = 11.$$

Donc :

$$\frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \frac{11 - 5}{3} = 2.$$

Entre  $-2$  et 4 :

$$f(-2) = 2 \times (-2) + 5 = 1 \quad \text{et} \quad f(4) = 13.$$

Donc :

$$\frac{f(4) - f(-2)}{4 - (-2)} = \frac{13 - 1}{6} = 2.$$

**Conclusion.** Dans les deux cas, le taux de variation vaut 2. Pour une fonction affine, le taux de variation est constant et égal au coefficient directeur.

**Essentiel à retenir** Pour une fonction affine  $x \mapsto mx + p$ , le taux de variation est toujours égal à  $m$ , quel que soit l'intervalle choisi.

### Exercice 10

**Énoncé** Pour  $g(x) = x^2$ , calculer le taux de variation entre 0 et 1, puis entre 2 et 3. Expliquer pourquoi les deux résultats sont différents.

**Correction.**

Entre 0 et 1 :

$$g(0) = 0 \quad \text{et} \quad g(1) = 1.$$

Donc :

$$\frac{g(1) - g(0)}{1 - 0} = 1.$$

Entre 2 et 3 :

$$g(2) = 4 \quad \text{et} \quad g(3) = 9.$$

Donc :

$$\frac{g(3) - g(2)}{3 - 2} = 5.$$

**Conclusion.** Les deux taux sont différents car la fonction carré n'est pas affine : sa pente moyenne dépend de l'intervalle choisi.

**Vigilance** Pour une fonction non affine, un taux de variation calculé sur un intervalle ne donne pas forcément le même résultat sur un autre intervalle.

### Exercice 11

**Énoncé** Sur le graphique, lire les coordonnées des points  $A$ ,  $B$  et  $C$ . Calculer la pente moyenne entre  $A$  et  $B$ , puis entre  $B$  et  $C$ .

**Correction.**

Par lecture graphique, on lit approximativement :

$$A(1; 1), \quad B(4; 4), \quad C(5; 3).$$

La pente moyenne entre  $A$  et  $B$  est :

$$\frac{4 - 1}{4 - 1} = \frac{3}{3} = 1.$$

La pente moyenne entre  $B$  et  $C$  est :

$$\frac{3 - 4}{5 - 4} = -1.$$

**Conclusion.** La pente moyenne entre  $A$  et  $B$  vaut environ 1. La pente moyenne entre  $B$  et  $C$  vaut environ  $-1$ .

**Vigilance** Quand les coordonnées sont lues sur un graphique, les résultats sont généralement approchés. On peut donc utiliser le symbole  $\approx$  si la lecture n'est pas exacte.

**Exercice 12**

**Énoncé** La sécante représentée passe par deux points de la courbe. Lire leurs coordonnées approximatives, puis calculer le coefficient directeur de la sécante.

**Correction.**

Par lecture graphique, la sécante passe approximativement par :

$$A(1; 1) \quad \text{et} \quad B(4; 2).$$

Son coefficient directeur est donc :

$$\frac{2 - 1}{4 - 1} = \frac{1}{3}.$$

**Conclusion.** Le coefficient directeur de la sécante est environ :

$$\frac{1}{3}.$$

**Essentiel à retenir** Une sécante est une droite passant par deux points de la courbe. Sa pente est le taux de variation entre les deux abscisses correspondantes.

**Exercice 13**

**Énoncé** On donne le tableau suivant.

|        |    |   |   |   |   |
|--------|----|---|---|---|---|
| $x$    | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| $f(x)$ | 4  | 1 | 0 | 1 | 4 |

Calculer les taux de variation entre deux abscisses consécutives.

**Correction.**

Entre -1 et 0 :

$$\frac{f(0) - f(-1)}{0 - (-1)} = \frac{1 - 4}{1} = -3.$$

Entre 0 et 1 :

$$\frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = 0 - 1 = -1.$$

Entre 1 et 2 :

$$\frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = 1 - 0 = 1.$$

Entre 2 et 3 :

$$\frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = 4 - 1 = 3.$$

**Conclusion.** Les taux de variation successifs sont :

$$-3, \quad -1, \quad 1, \quad 3.$$

**Essentiel à retenir** Des taux successifs permettent d'observer comment la pente moyenne évolue d'un intervalle au suivant.

**Exercice 14**

**Énoncé** Une entreprise produit  $q$  objets. Son coût total, en euros, est

$$C(q) = 0,5q^2 + 4q + 20.$$

Calculer l'accroissement moyen du coût entre  $q = 10$  et  $q = 20$ . Interpréter le résultat.

**Correction.**

On calcule :

$$C(10) = 0,5 \times 10^2 + 4 \times 10 + 20 = 50 + 40 + 20 = 110.$$

$$C(20) = 0,5 \times 20^2 + 4 \times 20 + 20 = 200 + 80 + 20 = 300.$$

L'accroissement moyen du coût entre 10 et 20 objets est :

$$\frac{C(20) - C(10)}{20 - 10} = \frac{300 - 110}{10} = 19.$$

**Conclusion.** Entre 10 et 20 objets, le coût augmente en moyenne de 19 euros par objet supplémentaire.

**Vigilance** L'interprétation doit mentionner l'unité : ici, le taux s'exprime en euros par objet.

## Exercice 15

**Énoncé** Pour chaque situation, dire ce que représente le taux de variation.

1. Distance en fonction du temps.
2. Coût total en fonction du nombre d'objets.
3. Température en fonction de l'heure.

**Correction.**

1. Si une distance est donnée en fonction du temps, le taux de variation représente une vitesse moyenne.
2. Si un coût total est donné en fonction du nombre d'objets, le taux de variation représente un coût moyen supplémentaire par objet.
3. Si une température est donnée en fonction de l'heure, le taux de variation représente une variation moyenne de température par unité de temps.

**Conclusion.** Le taux de variation dépend des grandeurs étudiées : il possède souvent une unité issue du quotient des unités.

**Essentiel à retenir** Un taux de variation n'est pas seulement un nombre : il a souvent une signification concrète et une unité.

## Exercice 16

**Énoncé** Soit  $f(x) = x^2 - 4x + 1$ . Calculer le taux de variation entre 0 et 2, entre 2 et 4, puis entre 0 et 4. Comment interpréter le troisième résultat ?

**Correction.**

On calcule :

$$f(0) = 1,$$

$$f(2) = 2^2 - 4 \times 2 + 1 = 4 - 8 + 1 = -3,$$

$$f(4) = 4^2 - 4 \times 4 + 1 = 16 - 16 + 1 = 1.$$

Entre 0 et 2 :

$$\frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{-3 - 1}{2} = -2.$$

Entre 2 et 4 :

$$\frac{f(4) - f(2)}{4 - 2} = \frac{1 - (-3)}{2} = 2.$$

Entre 0 et 4 :

$$\frac{f(4) - f(0)}{4 - 0} = \frac{1 - 1}{4} = 0.$$

**Conclusion.** Le taux entre 0 et 4 est nul car les images aux extrémités sont égales. Cela ne signifie pas que la fonction est constante sur  $[0; 4]$ .

**Erreur type** Un taux de variation nul entre deux abscisses signifie seulement que les images aux extrémités sont égales. Cela ne signifie pas que la fonction est constante entre ces deux abscisses.

## C — Approfondir, choisir, corriger

### Exercice 17

**Énoncé** Pour  $f(x) = x^2$ , calculer le taux de variation entre  $a$  et  $b$ , puis simplifier.

1.  $a = 1, b = 1 + h$ .
2.  $a = 2, b = 2 + h$ .
3.  $a = -1, b = -1 + h$ .

On suppose  $h \neq 0$ .

**Correction.**

1. Entre 1 et  $1 + h$  :

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{(1+h) - 1} = \frac{(1+h)^2 - 1}{h}.$$

Or :

$$(1+h)^2 - 1 = 1 + 2h + h^2 - 1 = 2h + h^2.$$

Donc :

$$\frac{(1+h)^2 - 1}{h} = \frac{2h + h^2}{h} = 2 + h.$$

2. Entre 2 et  $2 + h$  :

$$\frac{f(2+h) - f(2)}{(2+h) - 2} = \frac{(2+h)^2 - 4}{h}.$$

Or :

$$(2+h)^2 - 4 = 4 + 4h + h^2 - 4 = 4h + h^2.$$

Donc :

$$\frac{(2+h)^2 - 4}{h} = 4 + h.$$

3. Entre  $-1$  et  $-1 + h$  :

$$\frac{f(-1+h) - f(-1)}{(-1+h) - (-1)} = \frac{(-1+h)^2 - 1}{h}.$$

Or :

$$(-1 + h)^2 - 1 = 1 - 2h + h^2 - 1 = -2h + h^2.$$

Donc :

$$\frac{(-1 + h)^2 - 1}{h} = -2 + h.$$

**Conclusion.** Les taux simplifiés sont :

$$2 + h, \quad 4 + h, \quad -2 + h.$$

**Vigilance** On peut simplifier par  $h$  uniquement parce que  $h \neq 0$ . Cette condition doit toujours être conservée dans ce type de calcul.

### Exercice 18

**Énoncé** Soit  $f(x) = x^2 - 3x + 2$ . Calculer et simplifier

$$\frac{f(2 + h) - f(2)}{h},$$

avec  $h \neq 0$ .

**Correction.**

On calcule d'abord :

$$f(2) = 2^2 - 3 \times 2 + 2 = 4 - 6 + 2 = 0.$$

Puis :

$$f(2 + h) = (2 + h)^2 - 3(2 + h) + 2.$$

On développe :

$$f(2 + h) = 4 + 4h + h^2 - 6 - 3h + 2 = h^2 + h.$$

Donc :

$$\frac{f(2 + h) - f(2)}{h} = \frac{h^2 + h - 0}{h} = \frac{h(h + 1)}{h}.$$

Comme  $h \neq 0$ , on peut simplifier par  $h$  :

$$\frac{f(2 + h) - f(2)}{h} = h + 1.$$

**Conclusion.**

$$\frac{f(2 + h) - f(2)}{h} = h + 1.$$

**Essentiel à retenir** Dans un quotient avec  $h$ , l'objectif est souvent de faire apparaître un facteur  $h$  au numérateur afin de simplifier.

### Exercice 19

**Énoncé** Sur la figure, les trois sécantes partent du même point. Classer leurs pentes de la plus petite à la plus grande, puis expliquer ce que signifie « rapprocher le deuxième point ».

**Correction.**

Sur la figure, la sécante « très proche » est la moins pentue, la sécante « proche » est plus pentue, et la sécante « loin » est la plus pentue.

On obtient donc le classement :

$$\text{très proche} < \text{proche} < \text{loin}.$$

Rapprocher le deuxième point signifie faire glisser le second point de la sécante vers le premier point, le long de la courbe. Cela prépare l'idée de pente instantanée, c'est-à-dire la pente de la tangente.

**Conclusion.** Les pentes se classent de la plus petite à la plus grande ainsi :

$$\text{très proche}, \quad \text{proche}, \quad \text{loin}.$$

**Essentiel à retenir** Quand le deuxième point d'une sécante se rapproche du premier, on prépare l'idée de tangente et donc de nombre dérivé.

## Exercice 20

**Énoncé** Un élève écrit : « Le taux entre 1 et 4 est positif, donc la fonction est croissante sur  $[1; 4]$ . » Expliquer pourquoi cette conclusion est trop rapide.

**Correction.**

Un taux de variation positif entre 1 et 4 signifie seulement que :

$$f(4) > f(1).$$

Cela décrit l'évolution moyenne entre les deux extrémités de l'intervalle. Cela ne garantit pas que la fonction augmente à chaque instant entre 1 et 4.

La fonction pourrait augmenter globalement tout en ayant des phases de baisse entre 1 et 4.

**Conclusion.** Une pente moyenne positive ne suffit pas à prouver qu'une fonction est croissante sur tout l'intervalle.

**Erreur type** Confondre « évolution moyenne positive » et « fonction croissante sur tout l'intervalle » est une erreur fréquente. Un taux positif donne seulement une information sur les deux extrémités.

## Exercice 21

**Énoncé** Corriger les phrases.

1. « Le taux de variation est  $f(b) - f(a)$ . »
2. « La sécante est la courbe entre  $A$  et  $B$ . »
3. « Si la pente est négative, alors toutes les images sont négatives. »
4. « Dans  $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ , on peut prendre  $h = 0$ . »

**Correction.**

1. Le taux de variation n'est pas seulement l'accroissement de l'image. La phrase correcte est :

$$\text{Le taux de variation est } \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

2. Une sécante n'est pas une portion de courbe. La phrase correcte est : la sécante est la droite passant par deux points de la courbe.

3. Une pente négative indique une baisse moyenne entre deux points ; elle ne signifie pas que toutes les images sont négatives.

4. On ne peut pas prendre  $h = 0$ , car  $h$  est au dénominateur. Il faut donc :

$$h \neq 0.$$

**Conclusion.** Ces corrections distinguent accroissement, taux, droite sécante, signe d'une pente et signe des images.

**Essentiel à retenir** Un taux de variation est une pente moyenne. Il ne faut pas le confondre avec une image, une portion de courbe ou le signe des valeurs de la fonction.

### Exercice 22

**Énoncé** On donne deux points  $A(a; f(a))$  et  $B(b; f(b))$ . Calculer le taux correspondant.

1.  $A(1; 3)$ ,  $B(5; 11)$ .
2.  $A(-2; 4)$ ,  $B(2; -4)$ .
3.  $A(0; 7)$ ,  $B(3; 7)$ .
4.  $A(4; -1)$ ,  $B(1; 5)$ .

**Correction.**

1.

$$\frac{11 - 3}{5 - 1} = \frac{8}{4} = 2.$$

2.

$$\frac{-4 - 4}{2 - (-2)} = \frac{-8}{4} = -2.$$

3.

$$\frac{7 - 7}{3 - 0} = 0.$$

4.

$$\frac{5 - (-1)}{1 - 4} = \frac{6}{-3} = -2.$$

**Conclusion.** Les taux sont :

$$2, \quad -2, \quad 0, \quad -2.$$

**Vigilance** Dans la question 4, les abscisses sont données dans l'ordre 4 puis 1. On garde le même ordre au numérateur et au dénominateur :

$$\frac{5 - (-1)}{1 - 4}.$$

### Exercice 23

**Énoncé** Trouver une fonction affine et une fonction non affine qui ont toutes les deux un taux de variation égal à 2 entre 0 et 3. Expliquer pourquoi cela ne signifie pas qu'elles ont le même comportement entre 0 et 3.

**Correction.**

Une fonction affine possible est :

$$f(x) = 2x.$$

Entre 0 et 3, son taux de variation vaut :

$$\frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \frac{6 - 0}{3} = 2.$$

Une fonction non affine possible est :

$$g(x) = x^2 - x.$$

On calcule :

$$g(0) = 0 \quad \text{et} \quad g(3) = 9 - 3 = 6.$$

Donc :

$$\frac{g(3) - g(0)}{3 - 0} = \frac{6}{3} = 2.$$

Pourtant,  $f$  et  $g$  n'ont pas le même comportement entre 0 et 3. Par exemple :

$$f(1) = 2 \quad \text{mais} \quad g(1) = 0.$$

**Conclusion.** Deux fonctions peuvent avoir le même taux de variation entre deux abscisses sans être égales sur tout l'intervalle.

**Erreur type** Un taux de variation identique ne signifie pas que deux fonctions sont identiques. Il compare seulement les valeurs aux deux extrémités de l'intervalle.

## Exercice 24

**Énoncé** On sait que le taux de variation d'une fonction  $f$  entre 1 et 5 vaut  $-2$ . Que peut-on dire de l'évolution moyenne ? Peut-on connaître  $f(1)$  et  $f(5)$  séparément ? Donner un exemple possible.

**Correction.**

Le taux de variation entre 1 et 5 vaut :

$$\frac{f(5) - f(1)}{5 - 1} = -2.$$

Donc :

$$\frac{f(5) - f(1)}{4} = -2 \iff f(5) - f(1) = -8.$$

Cela signifie qu'en moyenne, la fonction diminue de 2 unités lorsque  $x$  augmente de 1 unité.

On ne peut pas connaître  $f(1)$  et  $f(5)$  séparément. On connaît seulement leur différence.

Un exemple possible est :

$$f(1) = 10 \quad \text{et} \quad f(5) = 2.$$

Alors :

$$\frac{2 - 10}{5 - 1} = \frac{-8}{4} = -2.$$

**Conclusion.** On connaît seulement l'évolution moyenne :  $f(5) - f(1) = -8$ . Les valeurs séparées de  $f(1)$  et  $f(5)$  ne sont pas déterminées.

**Essentiel à retenir** Connaître un taux de variation ne suffit pas à connaître les deux valeurs séparément : il donne seulement une relation entre elles.

## D — Synthèse, problèmes et prise d'initiative

## Exercice 25

**Énoncé** Le graphique représente la distance parcourue par un cycliste en fonction du temps. Calculer les vitesses moyennes entre 0 et 10 min, entre 10 et 20 min, puis entre 20 et 40 min. Décrire le trajet.

**Correction.**

D'après le graphique, on lit approximativement :

$$d(0) = 0, \quad d(10) = 5, \quad d(20) = 5, \quad d(40) = 10.$$

Entre 0 et 10 min :

$$\frac{5 - 0}{10 - 0} = 0,5$$

km/min, soit :

$$0,5 \times 60 = 30$$

km/h.

Entre 10 et 20 min :

$$\frac{5 - 5}{20 - 10} = 0.$$

Le cycliste est donc à l'arrêt sur cette période.

Entre 20 et 40 min :

$$\frac{10 - 5}{40 - 20} = \frac{5}{20} = 0,25$$

km/min, soit :

$$0,25 \times 60 = 15$$

km/h.

**Conclusion.** Le cycliste roule à 30 km/h en moyenne entre 0 et 10 min, s'arrête entre 10 et 20 min, puis repart à 15 km/h en moyenne entre 20 et 40 min.

**Vigilance** Le graphique donne le temps en minutes. Pour obtenir une vitesse en km/h, il faut convertir les km/min en km/h en multipliant par 60.

## Exercice 26

**Énoncé** Le coût total de fabrication de  $x$  objets est donné par

$$C(x) = 0,02x^2 + 3x + 50,$$

pour  $0 \leq x \leq 100$ . Calculer le taux de variation de  $C$  entre 20 et 40, puis entre 60 et 80. Comparer et interpréter.

**Correction.**

On calcule :

$$C(20) = 0,02 \times 20^2 + 3 \times 20 + 50 = 8 + 60 + 50 = 118.$$

$$C(40) = 0,02 \times 40^2 + 3 \times 40 + 50 = 32 + 120 + 50 = 202.$$

Le taux de variation entre 20 et 40 vaut :

$$\frac{C(40) - C(20)}{40 - 20} = \frac{202 - 118}{20} = 4,2.$$

On calcule ensuite :

$$C(60) = 0,02 \times 60^2 + 3 \times 60 + 50 = 72 + 180 + 50 = 302.$$

$$C(80) = 0,02 \times 80^2 + 3 \times 80 + 50 = 128 + 240 + 50 = 418.$$

Le taux de variation entre 60 et 80 vaut :

$$\frac{C(80) - C(60)}{80 - 60} = \frac{418 - 302}{20} = 5,8.$$

**Conclusion.** Entre 20 et 40 objets, le coût augmente en moyenne de 4,2 euros par objet. Entre 60 et 80 objets, il augmente en moyenne de 5,8 euros par objet. Le coût moyen supplémentaire augmente donc avec la quantité produite.

**Essentiel à retenir** Comparer deux taux de variation permet de voir si une grandeur augmente plus vite sur un intervalle que sur un autre.

### Exercice 27

**Énoncé** Tracer dans le repère une courbe possible d'une fonction  $f$  telle que le taux de variation entre 0 et 2 soit positif, entre 2 et 4 soit négatif, et entre 0 et 4 soit nul.

**Correction.**

Il suffit de choisir des points tels que :

$$f(2) > f(0) \quad \text{et} \quad f(4) = f(0).$$

Par exemple, on peut prendre :

$$f(0) = 1, \quad f(2) = 4, \quad f(4) = 1.$$

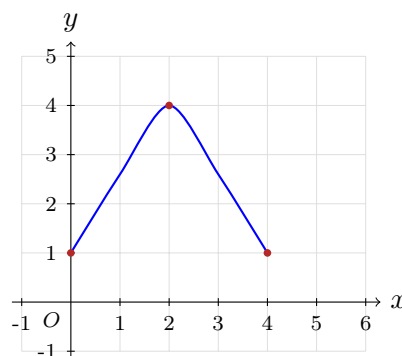
Alors :

$$\frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{4 - 1}{2} = \frac{3}{2} > 0.$$

$$\frac{f(4) - f(2)}{4 - 2} = \frac{1 - 4}{2} = -\frac{3}{2} < 0.$$

$$\frac{f(4) - f(0)}{4 - 0} = \frac{1 - 1}{4} = 0.$$

Une courbe possible est donc une courbe passant par les points  $(0; 1)$ ,  $(2; 4)$  et  $(4; 1)$ .



**Conclusion.** La courbe proposée vérifie les trois conditions demandées.

**Essentiel à retenir** Pour construire une courbe à partir de conditions sur des taux de variation, on choisit d'abord des valeurs de la fonction aux abscisses données, puis on vérifie les quotients.

### Exercice 28

**Énoncé** Un radar tronçon mesure qu'une voiture a parcouru 18 km en 12 minutes. Calculer sa vitesse moyenne en km/h. Peut-on affirmer que la voiture a roulé exactement à cette vitesse pendant tout le trajet ?

**Correction.**

On convertit :

$$12 \text{ min} = \frac{12}{60} \text{ h} = 0,2 \text{ h}.$$

La vitesse moyenne est donc :

$$\frac{18}{0,2} = 90.$$

**Conclusion.** La vitesse moyenne est de 90 km/h. On ne peut pas affirmer que la voiture a roulé exactement à cette vitesse pendant tout le trajet : il s'agit seulement d'une moyenne.

**Vigilance** Une vitesse moyenne ne donne pas la vitesse à chaque instant. La voiture a pu rouler parfois moins vite et parfois plus vite.

### Exercice 29

**Énoncé** Pour  $f(x) = x^2$ , on veut approcher la pente « au voisinage de 2 ». Calculer les taux entre 2 et 3, entre 2 et 2,1, puis entre 2 et 2,01. Que semblent indiquer ces valeurs ?

**Correction.**

Entre 2 et 3 :

$$\frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = \frac{9 - 4}{1} = 5.$$

Entre 2 et 2,1 :

$$\frac{f(2,1) - f(2)}{2,1 - 2} = \frac{2,1^2 - 4}{0,1} = \frac{4,41 - 4}{0,1} = 4,1.$$

Entre 2 et 2,01 :

$$\frac{f(2,01) - f(2)}{2,01 - 2} = \frac{2,01^2 - 4}{0,01} = \frac{4,0401 - 4}{0,01} = 4,01.$$

**Conclusion.** Les taux semblent se rapprocher de 4. Cela prépare l'idée que la pente instantanée au voisinage de 2 vaut 4.

**Essentiel à retenir** En rapprochant la deuxième abscisse de 2, on observe une pente moyenne de plus en plus locale. Cela prépare la notion de nombre dérivé.

### Exercice 30

**Énoncé** Inventer une situation concrète dans laquelle un taux de variation a une unité. Donner deux valeurs, calculer le taux, puis interpréter le résultat.

**Correction.**

On peut considérer une distance parcourue en fonction du temps.

Par exemple, une voiture passe de 10 km parcourus à 35 km parcourus entre 8 h et 10 h.

Le taux de variation est :

$$\frac{35 - 10}{10 - 8} = \frac{25}{2} = 12,5.$$

**Conclusion.** La vitesse moyenne est de 12,5 km/h. L'unité du taux est ici le km/h, car on divise une distance par une durée.

**Vigilance** L'unité du taux est obtenue en divisant l'unité de la grandeur de sortie par l'unité de la grandeur d'entrée.

**Exercice 31**

**Énoncé** Rédiger une courte synthèse : expliquer la différence entre accroissement, taux de variation, pente d'une sécante et information instantanée.

**Correction.**

Un accroissement est une différence entre deux valeurs :  $b - a$  pour la variable, ou  $f(b) - f(a)$  pour les images. Le taux de variation est le quotient de ces deux accroissements :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Graphiquement, ce taux correspond à la pente de la sécante passant par les points de la courbe d'abscisses  $a$  et  $b$ . Une information instantanée ne décrit plus une évolution moyenne entre deux points, mais le comportement au voisinage d'un seul point. C'est cette idée qui mènera à la notion de nombre dérivé.

**Conclusion.** Le taux de variation donne une information moyenne ; la pente instantanée décrit un comportement local.

**Essentiel à retenir** Accroissement : différence. Taux de variation : quotient de deux accroissements. Sécante : droite qui porte l'information moyenne. Information instantanée : information locale, au voisinage d'un point.

**Exercice 32**

**Énoncé** Dire si chaque affirmation est vraie, fausse ou insuffisamment précise. Justifier.

1. Deux fonctions qui ont le même taux de variation entre 0 et 3 sont égales sur  $[0; 3]$ .
2. Une pente de sécante positive suffit à prouver qu'une fonction est croissante sur tout l'intervalle.
3. Pour une fonction affine, le taux de variation est constant.
4. Un taux de variation peut avoir une unité.

**Correction.**

1. Faux. Deux fonctions peuvent avoir le même taux de variation entre deux points sans être égales entre ces deux points.

Par exemple :

$$f(x) = 2x \quad \text{et} \quad g(x) = x^2 - x$$

ont toutes les deux un taux de variation égal à 2 entre 0 et 3, mais elles ne sont pas égales sur  $[0; 3]$ .

**2. Faux.** Une pente de sécante positive indique seulement que l'évolution moyenne entre deux points est positive. Cela ne prouve pas que la fonction est croissante sur tout l'intervalle.

**3. Vrai.** Pour une fonction affine, le taux de variation est constant et égal au coefficient directeur.

**4. Vrai.** Par exemple, si une distance est exprimée en kilomètres et le temps en heures, le taux de variation s'exprime en km/h.

**Conclusion.** Les réponses sont :

faux,      faux,      vrai,      vrai.

**Essentiel à retenir** Un taux de variation est une information moyenne. Il peut être constant pour une fonction affine, avoir une unité dans un contexte concret, mais il ne suffit pas à décrire tout le comportement d'une fonction sur un intervalle.