

Méthode Ce corrigé est destiné à être relu après une recherche personnelle. Pour une inéquation, on transforme par équivalences, on étudie le signe, puis on conclut par $\mathcal{S} = \dots$. Pour un problème, on précise d'abord la variable et son domaine : un calcul exact peut être mathématiquement juste tout en étant incompatible avec la situation.

A – Inéquations et tableaux de signes

Exercice 1

Énoncé Résoudre : a) $(x-3)(x+2) \leq 0$; b) $-2(x+1)(x-5) > 0$; c) $x(4-x) \geq 0$; d) $3(x-2)^2 < 0$.

Méthode La forme factorisée donne immédiatement les valeurs d'annulation. On repère ensuite le signe du coefficient dominant pour savoir si le trinôme est positif à l'extérieur ou à l'intérieur des racines.

a) Les racines sont -2 et 3 , et le coefficient dominant est positif. Le produit est donc négatif ou nul entre les racines :

$$\mathcal{S} = [-2; 3].$$

b) Les racines sont -1 et 5 . Entre elles, $(x+1)(x-5) < 0$, donc $-2(x+1)(x-5) > 0$:

$$\mathcal{S} =]-1; 5[.$$

c) $x(4-x) = -x(x-4)$ possède les racines 0 et 4 , avec un coefficient dominant négatif. Il est positif ou nul entre les racines :

$$\mathcal{S} = [0; 4].$$

d) Un carré est toujours positif ou nul. Ainsi,

$$3(x-2)^2 \geq 0$$

pour tout réel x , et ne peut jamais être strictement négatif :

$$\mathcal{S} = \emptyset.$$

Exercice 2

Énoncé Factoriser, puis résoudre :

$$x^2 - 7x \geq 0, \quad 4x^2 - 25 < 0, \quad x^2 - 6x + 8 \leq 0, \quad -x^2 + 9 > 0.$$

Méthode On cherche d'abord un facteur commun, une différence de deux carrés ou deux nombres dont la somme et le produit conviennent. Cette étape évite un calcul de discriminant inutile.

$$\begin{aligned} x^2 - 7x \geq 0 &\iff x(x-7) \geq 0, \\ 4x^2 - 25 < 0 &\iff (2x-5)(2x+5) < 0, \\ x^2 - 6x + 8 \leq 0 &\iff (x-2)(x-4) \leq 0, \\ -x^2 + 9 > 0 &\iff (3-x)(3+x) > 0. \end{aligned}$$

La lecture des signes donne :

- a) $\mathcal{S} =] - \infty; 0] \cup [7; +\infty[$,
b) $\mathcal{S} = \left] -\frac{5}{2}; \frac{5}{2} \right[$,
c) $\mathcal{S} = [2; 4]$,
d) $\mathcal{S} =] - 3; 3[$.

Exercice 3

Énoncé Résoudre à l'aide du discriminant :

$$2x^2 - 5x - 3 \leq 0, \quad 3x^2 + 2x - 1 > 0, \quad 4x^2 - 4x + 1 \geq 0, \quad x^2 + 2x + 5 < 0.$$

Méthode Le discriminant détermine les racines. Le signe du coefficient dominant permet ensuite de construire le tableau de signes. Les cas $\Delta = 0$ et $\Delta < 0$ doivent être traités comme des cas à part entière.

a) $\Delta = 49$, donc les racines sont $-\frac{1}{2}$ et 3. Comme $a = 2 > 0$, le trinôme est négatif ou nul entre elles :

$$\mathcal{S} = \left[-\frac{1}{2}; 3 \right].$$

b) $\Delta = 16$, donc

$$x_1 = \frac{-2 - 4}{6} = -1, \quad x_2 = \frac{-2 + 4}{6} = \frac{1}{3}.$$

Comme $a = 3 > 0$, le trinôme est strictement positif à l'extérieur :

$$\mathcal{S} =] - \infty; -1[\cup \left] \frac{1}{3}; +\infty \right[.$$

c) $4x^2 - 4x + 1 = (2x - 1)^2$. Ce carré est positif ou nul pour tout réel :

$$\mathcal{S} = \mathbb{R}.$$

d) $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times 5 = -16 < 0$. Comme $a = 1 > 0$, le trinôme est strictement positif sur $\mathbb{R}$. Il n'est donc jamais négatif :

$$\mathcal{S} = \emptyset.$$

Exercice 4

Énoncé Pour $P(x) = -2(x + 4)(x - 1)$, résoudre $P(x) > 0$, $P(x) \geq 0$, $P(x) < 0$ et $P(x) \leq 0$.

Propriété utilisée Les racines sont -4 et 1 , et le coefficient dominant est négatif. Ainsi P est positif entre les racines et négatif à l'extérieur.

$$\begin{aligned} P(x) > 0 &\iff x \in] - 4; 1[, \\ P(x) \geq 0 &\iff x \in [-4; 1], \\ P(x) < 0 &\iff x \in] - \infty; -4[\cup] 1; +\infty[, \\ P(x) \leq 0 &\iff x \in] - \infty; -4] \cup [1; +\infty[. \end{aligned}$$

Vigilance Les racines sont incluses seulement lorsque l'inégalité est large ($\leq$ ou $\geq$).

Exercice 5

Énoncé Un trinôme P est négatif sur $] -\infty; -2[$, positif sur $] -2; 3[$, puis négatif sur $]3; +\infty[$, et s'annule en -2 et 3 . Donner le signe du coefficient dominant, résoudre $P(x) \geq 0$ et $P(x) < 0$, puis donner les racines et le signe de Δ .

Le trinôme est négatif à l'extérieur des racines : son coefficient dominant est donc négatif. Il possède deux racines distinctes, donc $\Delta > 0$.

Conclusion.

$$a < 0, \quad \mathcal{S}(P \geq 0) = [-2; 3], \quad \mathcal{S}(P < 0) =]-\infty; -2[\cup]3; +\infty[,$$

les racines sont -2 et 3 , et $\Delta > 0$.

Exercice 6

Énoncé Corriger quatre affirmations concernant les solutions d'une inéquation et le signe d'un trinôme.

1. $x(x-4)$ est négatif ou nul entre 0 et 4. La correction est

$$\mathcal{S} = [0; 4].$$

2. $(x-2)^2 > 0$ est vraie pour tout réel sauf $x = 2$. Ainsi,

$$\mathcal{S} = \mathbb{R} \setminus \{2\}.$$

3. Si $\Delta < 0$, le trinôme garde le signe de son coefficient dominant. Il est toujours positif seulement lorsque $a > 0$, et toujours négatif lorsque $a < 0$.
4. Les solutions de $P(x) \geq 0$ sont à l'extérieur des racines seulement lorsque $a > 0$. Lorsque $a < 0$, elles sont entre les racines.

Exercice 7

Énoncé Résoudre trois inéquations, puis intersecter avec le domaine imposé : $[0; 4]$, $[0; 10]$ et $[0; 12]$.

Méthode On résout d'abord dans $\mathbb{R}$, puis on conserve uniquement les solutions compatibles avec le domaine. Cette intersection est indispensable dans un problème.

1. Dans $\mathbb{R}$, $(x-1)(x-6) \leq 0$ donne $[1; 6]$. Ainsi,

$$[1; 6] \cap [0; 4] = [1; 4].$$

2. $-x^2 + 10x - 16 = -(x-2)(x-8)$, donc l'expression est strictement positive sur $]2; 8[$, déjà inclus dans $[0; 10]$.

$$\mathcal{S} =]2; 8[.$$

- 3.
- $$x(12-x) \geq 27 \iff -x^2 + 12x - 27 \geq 0 \iff -(x-3)(x-9) \geq 0.$$

Ainsi,

$$\mathcal{S} = [3; 9].$$

Exercice 8

Énoncé Déterminer les réels m tels que

$$x^2 + (m-2)x + m \geq 0 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Méthode Le coefficient de x^2 vaut $1 > 0$. Le trinôme est donc positif ou nul sur $\mathbb{R}$ exactement lorsqu'il possède au plus une racine réelle, soit lorsque son discriminant est négatif ou nul.

$$\Delta_m = (m - 2)^2 - 4m = m^2 - 8m + 4.$$

Les racines de $m^2 - 8m + 4$ sont

$$m_1 = 4 - 2\sqrt{3}, \quad m_2 = 4 + 2\sqrt{3}.$$

Le coefficient dominant de ce trinôme en m est positif, donc

$$\Delta_m \leq 0 \iff m \in [4 - 2\sqrt{3}; 4 + 2\sqrt{3}].$$

Conclusion. $m \in [4 - 2\sqrt{3}; 4 + 2\sqrt{3}]$.

B – Comparer des fonctions et des courbes

Exercice 9

Énoncé Soient $f(x) = x^2 - 4x + 3$ et $g(x) = x + 3$. Résoudre $f(x) = g(x)$, puis $f(x) \leq g(x)$, et interpréter graphiquement.

Méthode Comparer deux fonctions revient à étudier le signe de leur différence. Les zéros de $f - g$ donnent les intersections ; son signe donne la position relative.

$$f(x) - g(x) = x^2 - 5x = x(x - 5).$$

Ainsi,

$$f(x) = g(x) \iff x = 0 \text{ ou } x = 5,$$

et

$$f(x) \leq g(x) \iff x(x - 5) \leq 0 \iff x \in [0; 5].$$

Conclusion. Les courbes se coupent aux abscisses 0 et 5. La courbe de f est sous celle de g pour $x \in [0; 5]$.

Exercice 10

Énoncé À partir du graphique, estimer les intersections, l'intervalle où $\mathcal{C}_f$ est sous $\mathcal{C}_g$, puis le signe de $f - g$.

On lit des intersections d'abscisses proches de 0 et 6. Entre ces deux valeurs, la parabole est sous la droite.

Conclusion.

$$f - g = 0 \text{ vers } 0 \text{ et } 6, \quad f - g \leq 0 \text{ sur } [0; 6], \quad f - g \geq 0 \text{ à l'extérieur.}$$

Exercice 11

Énoncé Avec

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 1, \quad g(x) = \frac{1}{2}x + 1,$$

retrouver exactement les intersections et la position relative des courbes.

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= \frac{1}{2}x^2 - 3x \\ &= \frac{1}{2}x(x - 6). \end{aligned}$$

Les racines sont 0 et 6, et le coefficient dominant est positif.

Conclusion. Les intersections ont pour abscisses 0 et 6. $\mathcal{C}_f$ est sous $\mathcal{C}_g$ sur $[0; 6]$, et au-dessus à l'extérieur. La lecture graphique de l'exercice 10 est confirmée.

Exercice 12

Énoncé Déterminer les positions relatives de la parabole de $f : x \mapsto x^2 - 2x - 3$ et de l'axe des abscisses.

$$f(x) = x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3).$$

La courbe est au-dessus de l'axe lorsque $f(x) > 0$, sur l'axe lorsque $f(x) = 0$, et en dessous lorsque $f(x) < 0$.

Conclusion. La parabole coupe l'axe aux abscisses -1 et 3 . Elle est au-dessus sur $] - \infty; -1[\cup]3; +\infty[$, et en dessous sur $] -1; 3[$.

Exercice 13

Énoncé Pour $x \in [0; 12]$, deux offres coûtent

$$A(x) = 2x^2 + 15, \quad B(x) = 9x + 8.$$

Déterminer les égalités de prix et quand A est la moins chère.

$$A(x) = B(x) \iff 2x^2 - 9x + 7 = 0.$$

$\Delta = 25$, donc les racines sont

$$x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{7}{2}.$$

Comme $2x^2 - 9x + 7 \leq 0$ entre les racines,

$$A(x) \leq B(x) \iff x \in \left[1; \frac{7}{2}\right].$$

Conclusion. Les prix sont égaux pour $x = 1$ et $x = 3,5$. L'offre A est au plus aussi chère que B entre 1 et 3,5 unités de durée (strictement moins chère entre ces deux bornes).

Exercice 14

Énoncé Résoudre :

$$(x - 3)^2 \leq 16, \quad 2(x + 1)^2 - 8 > 0, \quad (2x - 5)^2 \geq 9.$$

Méthode La différence de deux carrés est plus rapide que le discriminant : $U^2 - a^2 = (U - a)(U + a)$.

$$\begin{aligned}
(x-3)^2 \leq 16 &\iff -4 \leq x-3 \leq 4 \iff x \in [-1; 7], \\
2(x+1)^2 - 8 > 0 &\iff (x+1)^2 > 4 \iff x \in]-\infty; -3] \cup]1; +\infty[, \\
(2x-5)^2 \geq 9 &\iff |2x-5| \geq 3 \\
&\iff x \in]-\infty; 1] \cup [4; +\infty[.
\end{aligned}$$

Exercice 15

Énoncé Construire une fonction affine f et une fonction du second degré g telles que $f(x) \leq g(x) \iff x \in [-2; 4]$.

On peut choisir $f(x) = 0$. Il faut alors construire g positive ou nulle exactement entre -2 et 4 . On prend un coefficient dominant négatif :

$$g(x) = -(x+2)(x-4).$$

Alors

$$f(x) \leq g(x) \iff -(x+2)(x-4) \geq 0 \iff x \in [-2; 4].$$

Conclusion. Une réponse possible est $f : x \mapsto 0, \quad g : x \mapsto -(x+2)(x-4)$.

C – Extremums et optimisation

Exercice 16

Énoncé Donner l'extremum et l'abscisse où il est atteint pour quatre trinômes.

Propriété utilisée Dans $a(x-\alpha)^2 + \beta$, l'extremum vaut β et est atteint en $x = \alpha$. Il s'agit d'un minimum si $a > 0$, d'un maximum si $a < 0$.

Fonction	Extremum	Abscisse
$2(x-3)^2 - 5$	min = -5	$x = 3$
$-4(x+1)^2 + 9$	max = 9	$x = -1$
$x^2 - 8x + 7 = (x-4)^2 - 9$	min = -9	$x = 4$
$-2x^2 + 12x - 11 = -2(x-3)^2 + 7$	max = 7	$x = 3$

Exercice 17

Énoncé Une fonction du second degré croît jusqu'à la valeur 18, atteinte en $x = 4$, puis décroît. Donner son sommet, le signe de son coefficient dominant, une forme canonique possible et résoudre $f(x) \leq 18$.

Le sommet est $S(4; 18)$. La fonction admet un maximum, donc son coefficient dominant est négatif. Une forme possible est

$$f(x) = -(x-4)^2 + 18.$$

Comme 18 est le maximum, $f(x) \leq 18$ pour tout réel.

Conclusion. $S(4; 18)$, $a < 0$, une forme possible est $-(x-4)^2 + 18$, et $\mathcal{S} = \mathbb{R}$.

Exercice 18

Énoncé Pour $f(x) = 2(x - 5)^2 - 8$, déterminer les extremums sur $\mathbb{R}$, $[1; 7]$ et $[6; 10]$.

Le sommet est $S(5; -8)$, et $a = 2 > 0$.

- Sur $\mathbb{R}$, le minimum vaut -8 , atteint en 5 .
- Sur $[1; 7]$, le minimum vaut encore -8 . Pour le maximum, on compare les bornes :

$$f(1) = 24, \quad f(7) = 0.$$

Le maximum vaut donc 24 , atteint en 1 .

- Sur $[6; 10]$, la fonction est croissante, car cet intervalle est à droite du sommet :

$$f(6) = -6, \quad f(10) = 42.$$

Le minimum vaut -6 en 6 , et le maximum 42 en 10 .

Exercice 19

Énoncé Un rectangle a un demi-périmètre de 12 cm. Si x est un côté, déterminer le domaine, l'aire et l'aire maximale.

L'autre côté mesure $12 - x$. Les deux longueurs étant strictement positives,

$$x \in]0; 12[.$$

L'aire vaut

$$A(x) = x(12 - x) = -x^2 + 12x = -(x - 6)^2 + 36.$$

Conclusion. L'aire maximale vaut 36 cm^2 , atteinte pour $x = 6$. Le rectangle optimal est donc un carré de côté 6 cm.

Exercice 20

Énoncé Avec 40 m de grillage, on construit un enclos adossé à un mur. Établir $A(x) = x(40 - 2x)$, optimiser, puis résoudre $A(x) \geq 150$.

Si x est la profondeur, la largeur parallèle au mur vaut $40 - 2x$, avec $x \in]0; 20[$. Ainsi,

$$A(x) = x(40 - 2x) = -2(x - 10)^2 + 200.$$

L'aire maximale vaut 200 m^2 , pour $x = 10$, et l'autre dimension vaut 20 . Ensuite,

$$\begin{aligned} A(x) \geq 150 &\iff -2x^2 + 40x - 150 \geq 0 \\ &\iff -2(x - 5)(x - 15) \geq 0. \end{aligned}$$

Conclusion. L'enclos optimal mesure 10 m sur 20 m. L'aire est au moins 150 m^2 pour $x \in [5; 15]$.

Exercice 21

Énoncé Le prix est p euros et la demande $q(p) = 120 - 4p$, avec $0 \leq p \leq 30$. Exprimer et maximiser la recette.

$$R(p) = p q(p) = p(120 - 4p) = -4p^2 + 120p = -4(p - 15)^2 + 900.$$

Conclusion. La recette maximale vaut 900 euros, pour un prix de 15 euros. La demande correspondante est $q(15) = 60$ articles.

Exercice 22

Énoncé Pour $t \in [0; 8]$, $h(t) = -(t - 4)^2 + 24$. Donner la hauteur maximale et les instants où $h(t) \geq 15$.

La forme canonique donne immédiatement un maximum de 24 m en $t = 4$. Puis

$$\begin{aligned}h(t) \geq 15 &\iff -(t - 4)^2 + 24 \geq 15 \\&\iff (t - 4)^2 \leq 9 \\&\iff -3 \leq t - 4 \leq 3 \\&\iff 1 \leq t \leq 7.\end{aligned}$$

Conclusion. La hauteur maximale est 24 m à $t = 4$ s. Le projectile est à au moins 15 m entre 1 s et 7 s, soit pendant 6 s.

Exercice 23

Énoncé Deux nombres positifs ont pour somme 10. Maximiser leur produit, puis établir $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$.

Si le premier nombre vaut x , le second vaut $10 - x$, avec $x \in [0; 10]$. Leur produit est

$$P(x) = x(10 - x) = -(x - 5)^2 + 25.$$

Il est maximal pour $x = 5$, lorsque les deux nombres sont égaux. Plus généralement,

$$(a - b)^2 \geq 0 \iff a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \iff (a + b)^2 \geq 4ab.$$

Conclusion. $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$, avec égalité exactement lorsque $a = b$.

D – Problèmes, paramètres et synthèse

Exercice 24

Énoncé $B(x) = -x^2 + 12x - 20$, en milliers d'euros, pour $x \in [0; 15]$. Déterminer les seuils de rentabilité, la zone bénéficiaire et le maximum.

$$B(x) = -(x - 2)(x - 10) = -(x - 6)^2 + 16.$$

Les seuils sont $x = 2$ et $x = 10$. Comme le coefficient dominant est négatif, $B(x) > 0$ entre eux. Le maximum vaut 16, atteint en $x = 6$.

Conclusion. L'entreprise est strictement bénéficiaire pour une production comprise entre 200 et 1000 objets. Le bénéfice maximal est 16 000 euros pour 600 objets.

Exercice 25

Énoncé Une arche est modélisée par $f(x) = 5 - \frac{x^2}{5}$. Un véhicule centré, large de 6 m et haut de 3 m, peut-il passer ? Quelle est la hauteur maximale pour cette largeur ?

Méthode Un véhicule centré de largeur 6 occupe les abscisses de -3 à 3 . La hauteur disponible est minimale aux deux bords, car la parabole décroît quand on s'éloigne de 0.

$$f(3) = f(-3) = 5 - \frac{9}{5} = \frac{16}{5} = 3,2.$$

Comme $3,2 > 3$, le véhicule passe. On peut aussi vérifier

$$f(x) \geq 3 \iff x^2 \leq 10,$$

ce qui est vrai pour tout $x \in [-3; 3]$.

Conclusion. Le véhicule passe avec 0,2 m de marge aux bords. Pour une largeur de 6 m, la hauteur maximale est $\boxed{3,2 \text{ m}}$.

Exercice 26

Énoncé Pour $P_m(x) = x^2 - 2mx + 2m + 3$, déterminer les valeurs de m donnant un trinôme strictement positif sur $\mathbb{R}$, puis une racine unique.

$$\Delta_m = (-2m)^2 - 4(2m + 3) = 4(m - 3)(m + 1).$$

Comme le coefficient dominant vaut $1 > 0$:

$$P_m(x) > 0 \forall x \iff \Delta_m < 0 \iff -1 < m < 3.$$

Il existe une unique racine réelle lorsque $\Delta_m = 0$, donc pour $m = -1$ ou $m = 3$.

Conclusion.

$$\boxed{-1 < m < 3} \text{ pour la stricte positivité, } \boxed{m \in \{-1; 3\}} \text{ pour une racine double.}$$

Graphiquement : zéro, une ou deux intersections avec l'axe selon le signe de Δ_m .

Exercice 27

Énoncé Déterminer m pour que

$$(m - 1)x^2 - 2(m + 1)x + m - 5 \geq 0$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Méthode Il faut séparer le cas quadratique $m \neq 1$ du cas $m = 1$. Pour un trinôme positif ou nul sur $\mathbb{R}$, il faut un coefficient dominant positif et un discriminant négatif ou nul.

Pour $m \neq 1$,

$$\Delta_m = 4(m + 1)^2 - 4(m - 1)(m - 5) = 16(2m - 1).$$

Si $m > 1$, alors $\Delta_m > 0$, donc la condition échoue. Si $m < 1$, le coefficient dominant est négatif et l'expression tend vers $-\infty$, donc la condition échoue aussi. Enfin, pour $m = 1$, l'expression devient

$$-4x - 4,$$

qui n'est pas positive pour tout réel.

Conclusion. Il n'existe aucune valeur convenable : $\boxed{\mathcal{S} = \emptyset}$.

Exercice 28

Énoncé Approcher le maximum de $f(x) = -2x^2 + 7x + 3$ sur $[0; 5]$ avec un pas 0,1, puis donner la valeur exacte.

Méthode L'algorithme conserve la meilleure valeur rencontrée. La forme canonique sert ensuite de référence exacte pour mesurer l'erreur due au pas.

```
x = 0
x_max = 0
maximum = f(0)
tant que x <= 5 :
    si f(x) > maximum :
        maximum = f(x)
        x_max = x
    x = x + 0.1
```

Or

$$f(x) = -2\left(x - \frac{7}{4}\right)^2 + \frac{73}{8}.$$

Le maximum exact vaut $\frac{73}{8} = 9,125$, atteint en $\frac{7}{4} = 1,75$. Avec le pas 0,1, on obtient 9,12 pour $x = 1,7$ ou $x = 1,8$.

Conclusion. L'approximation est très proche, mais elle ne repère pas exactement l'abscisse 1,75.

Exercice 29

Énoncé Deux réels u et v ont pour somme s . Maximiser leur produit et examiner le cas $u, v \geq 0$.

$$v = s - u, \quad uv = u(s - u) = -u^2 + su = -\left(u - \frac{s}{2}\right)^2 + \frac{s^2}{4}.$$

Le carré est minimal en $u = \frac{s}{2}$, donc le produit est maximal pour

$$u = \frac{s}{2}, \quad v = s - u = \frac{s}{2}.$$

Si $u, v \geq 0$, il faut nécessairement $s \geq 0$, et $u \in [0; s]$. Le sommet appartient à ce domaine, donc le même maximum est atteint.

Conclusion. Le produit maximal vaut $\boxed{\frac{s^2}{4}}$, atteint lorsque $\boxed{u = v = \frac{s}{2}}$.

Exercice 30

Énoncé Une zone rectangulaire longe un bâtiment. Comparer le modèle obtenu avec une aire imposée de 300 m², puis avec une clôture imposée de 50 m.

Si $x > 0$ est la profondeur et si l'aire vaut 300, la longueur parallèle au bâtiment vaut $\frac{300}{x}$. La clôture nécessaire est donc

$$L(x) = 2x + \frac{300}{x},$$

qui n'est pas une fonction polynôme du second degré.

Avec 50 m de clôture, la longueur vaut $50 - 2x$, avec $x \in]0; 25[$. L'aire devient

$$A(x) = x(50 - 2x) = -2\left(x - \frac{25}{2}\right)^2 + \frac{625}{2}.$$

L'aire maximale vaut donc $312,5 \text{ m}^2$. Enfin,

$$\begin{aligned}A(x) = 300 &\iff -2x^2 + 50x = 300 \\&\iff x^2 - 25x + 150 = 0 \\&\iff (x - 10)(x - 15) = 0.\end{aligned}$$

Conclusion. L'objectif est atteignable avec les dimensions $10 \text{ m} \times 30 \text{ m}$ ou $15 \text{ m} \times 20 \text{ m}$. La première contrainte produit une fonction rationnelle ; la seconde, un trinôme.

Exercice 31

Énoncé On découpe des carrés de côté x dans une plaque carrée de côté 12. L'aire de la base est $(12 - 2x)^2$. Déterminer le domaine et quand cette aire est au moins 64.

Pour que la boîte existe, il faut

$$x > 0 \quad \text{et} \quad 12 - 2x > 0,$$

donc $x \in]0; 6[$. Sur ce domaine, $12 - 2x$ est positif. Ainsi,

$$\begin{aligned}(12 - 2x)^2 \geq 64 &\iff 12 - 2x \geq 8 \\&\iff -2x \geq -4 \\&\iff x \leq 2.\end{aligned}$$

Conclusion. Après intersection avec le domaine, $x \in]0; 2]$. Les carrés découpés doivent donc avoir un côté strictement positif et inférieur ou égal à 2.

Vigilance On ne peut prendre directement la racine carrée d'une inégalité sans contrôler le signe. Ici, $12 - 2x > 0$ est garanti par le domaine.

Exercice 32

Énoncé Un projectile a pour hauteur

$$h(t) = -5t^2 + 20t + 1, \quad t \geq 0.$$

Déterminer l'instant et la hauteur du maximum, puis la durée pendant laquelle le projectile est à au moins 16 m.

La forme canonique est

$$h(t) = -5(t - 2)^2 + 21.$$

Le maximum vaut donc 21 m et est atteint en $t = 2$ s. Ensuite,

$$\begin{aligned}h(t) \geq 16 &\iff -5t^2 + 20t - 15 \geq 0 \\&\iff -5(t - 1)(t - 3) \geq 0 \\&\iff t \in [1; 3].\end{aligned}$$

Conclusion. Le projectile atteint sa hauteur maximale de 21 m après 2 s . Il reste à au moins 16 m de $t = 1$ à $t = 3$, soit pendant 2 s .