

Corrigé détaillé — TD N05

Second degré : fonction carré et forme canonique

Méthode Une fonction du second degré donnée sous forme canonique s'écrit :

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta.$$

Son sommet est $S(\alpha; \beta)$, et son axe de symétrie est la droite d'équation $x = \alpha$. Si $a > 0$, la parabole est tournée vers le haut et β est un minimum. Si $a < 0$, la parabole est tournée vers le bas et β est un maximum.

A — Fonction carré et automatismes

Exercice 1

Énoncé Calculer sans calculatrice.

$$\begin{array}{llll} \text{a) } (-4)^2 & \text{b) } 3^2 - 5^2 & \text{c) } \left(\frac{1}{2}\right)^2 & \text{d) } -2^2 \\ \text{e) } (-2)^3 & \text{f) } (1 - 5)^2 & \text{g) } (3 - 7)^2 & \text{h) } -(3 - 7)^2 \end{array}$$

Correction.

$$(-4)^2 = 16.$$

$$3^2 - 5^2 = 9 - 25 = -16.$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

$$-2^2 = -(2^2) = -4.$$

$$(-2)^3 = -8.$$

$$(1 - 5)^2 = (-4)^2 = 16.$$

$$(3 - 7)^2 = (-4)^2 = 16.$$

$$-(3 - 7)^2 = -(-4)^2 = -16.$$

Conclusion.

$$16, \quad -16, \quad \frac{1}{4}, \quad -4, \quad -8, \quad 16, \quad 16, \quad -16.$$

Vigilance Il faut distinguer $(-2)^2 = 4$ et $-2^2 = -4$. Dans -2^2 , le carré ne porte que sur 2, pas sur -2 .

Exercice 2**Énoncé** Compléter le tableau de valeurs de la fonction carré, puis vérifier la symétrie des résultats.

x	-3	-2	-1	0
x^2	...	...	...	...

x	1	2	3
x^2	...	...	...

Correction.

x	-3	-2	-1	0
x^2	9	4	1	0

x	1	2	3
x^2	1	4	9

On observe que :

$$(-3)^2 = 3^2, \quad (-2)^2 = 2^2, \quad (-1)^2 = 1^2.$$

Conclusion. La fonction carré vérifie, pour tout réel x ,

$$(-x)^2 = x^2.$$

Sa courbe est donc symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Exercice 3**Énoncé** Développer et réduire.

$$\text{a) } (x+3)^2 \quad \text{b) } (x-5)^2 \quad \text{c) } 2(x-1)^2 \quad \text{d) } -(x+4)^2$$

Correction.

$$(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9.$$

$$(x-5)^2 = x^2 - 10x + 25.$$

$$2(x-1)^2 = 2(x^2 - 2x + 1) = 2x^2 - 4x + 2.$$

$$-(x+4)^2 = -(x^2 + 8x + 16) = -x^2 - 8x - 16.$$

Conclusion.

$$\begin{aligned} (x+3)^2 &= x^2 + 6x + 9, & (x-5)^2 &= x^2 - 10x + 25, \\ 2(x-1)^2 &= 2x^2 - 4x + 2, & -(x+4)^2 &= -x^2 - 8x - 16. \end{aligned}$$

Exercice 4**Énoncé** Dans chaque cas, faire apparaître un carré.

$$\begin{aligned} \text{a) } x^2 + 6x &= (x + \dots)^2 - \dots \\ \text{b) } x^2 - 8x &= (x - \dots)^2 - \dots \\ \text{c) } x^2 + 2x + 7 &= (x + \dots)^2 + \dots \end{aligned}$$

Correction.

$$x^2 + 6x = (x + 3)^2 - 9.$$

$$x^2 - 8x = (x - 4)^2 - 16.$$

$$x^2 + 2x + 7 = (x + 1)^2 + 6.$$

Conclusion.

$$x^2 + 6x = (x + 3)^2 - 9, \quad x^2 - 8x = (x - 4)^2 - 16, \quad x^2 + 2x + 7 = (x + 1)^2 + 6.$$

Exercice 5

Énoncé Sur le graphique de la fonction carré, lire les images de -2 , 0 , 2 , puis donner les antécédents de 4 .

Correction.

Sur le graphique de la fonction carré, on lit :

$$(-2)^2 = 4, \quad 0^2 = 0, \quad 2^2 = 4.$$

Les antécédents de 4 sont les nombres x tels que :

$$x^2 = 4.$$

On obtient :

$$x = -2 \quad \text{ou} \quad x = 2.$$

Conclusion.

$$f(-2) = 4, \quad f(0) = 0, \quad f(2) = 4.$$

Les antécédents de 4 sont -2 et 2 .

Exercice 6

Énoncé Les trois courbes sont des transformations de la fonction carré. Pour chacune, indiquer si le sommet est au-dessus, au-dessous, à gauche ou à droite de l'origine.

Correction.

On lit graphiquement la position des sommets.

La courbe C_1 a son sommet à droite de l'origine et au-dessous de l'origine.

La courbe C_2 a son sommet à gauche de l'origine et au-dessus de l'origine.

La courbe C_3 a son sommet sur l'axe des ordonnées, proche de l'origine.

Conclusion. Les transformations de la fonction carré se lisent à partir du sommet : déplacement horizontal, déplacement vertical, puis orientation de la parabole.

Vigilance Pour une courbe du type $a(x - \alpha)^2 + \beta$, le sommet est $S(\alpha; \beta)$. Un signe $+$ dans la parenthèse, comme $(x + 3)^2$, correspond à un déplacement vers la gauche.

Exercice 7**Énoncé** Compléter le tableau de variations de la fonction carré.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$x \mapsto x^2$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

Rédiger ensuite une phrase contenant les mots : décroissante, croissante, minimum.

Correction.

La fonction carré est décroissante sur $] -\infty; 0]$, puis croissante sur $[0; +\infty[$. Elle admet un minimum égal à 0, atteint pour $x = 0$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$x \mapsto x^2$	$+\infty$	0	$+\infty$

Conclusion. La fonction carré est décroissante sur $] -\infty; 0]$, croissante sur $[0; +\infty[$, et son minimum vaut 0.

Exercice 8**Énoncé** On sait que $f(x) = x^2$. Expliquer sans calculer pourquoi $f(-7) = f(7)$, puis donner deux nombres différents qui ont la même image par f .**Correction.**Pour tout réel x , on a :

$$(-x)^2 = x^2.$$

Donc :

$$f(-7) = (-7)^2 = 7^2 = f(7).$$

Deux nombres différents ayant la même image par la fonction carré sont par exemple -4 et 4 , car :

$$(-4)^2 = 4^2 = 16.$$

Conclusion. La fonction carré donne la même image à deux nombres opposés.

B — Lire et exploiter la forme canonique**Exercice 9****Énoncé** Pour chaque fonction, donner a , α , β , le sommet et l'axe de symétrie.

a) $f(x) = (x - 2)^2 - 3$ **b)** $g(x) = 3(x + 1)^2 + 4$
c) $h(x) = -2(x - 5)^2 + 1$ **d)** $p(x) = \frac{1}{2}(x + 3)^2 - 6$

Correction.

a)

$$f(x) = (x - 2)^2 - 3.$$

On identifie :

$$a = 1, \quad \alpha = 2, \quad \beta = -3.$$

Le sommet est $S(2; -3)$, et l'axe de symétrie est $x = 2$.

b)

$$g(x) = 3(x + 1)^2 + 4 = 3(x - (-1))^2 + 4.$$

On identifie :

$$a = 3, \quad \alpha = -1, \quad \beta = 4.$$

Le sommet est $S(-1; 4)$, et l'axe de symétrie est $x = -1$.

c)

$$h(x) = -2(x - 5)^2 + 1.$$

On identifie :

$$a = -2, \quad \alpha = 5, \quad \beta = 1.$$

Le sommet est $S(5; 1)$, et l'axe de symétrie est $x = 5$.

d)

$$p(x) = \frac{1}{2}(x + 3)^2 - 6 = \frac{1}{2}(x - (-3))^2 - 6.$$

On identifie :

$$a = \frac{1}{2}, \quad \alpha = -3, \quad \beta = -6.$$

Le sommet est $S(-3; -6)$, et l'axe de symétrie est $x = -3$.

Conclusion. La forme canonique donne directement le sommet et l'axe de symétrie.

Exercice 10

Énoncé Pour les fonctions de l'exercice 9, indiquer si l'extremum est un maximum ou un minimum, puis donner sa valeur.

Correction.

Pour $f(x) = (x - 2)^2 - 3$, on a $a = 1 > 0$. La fonction admet donc un minimum, égal à -3 .

Pour $g(x) = 3(x + 1)^2 + 4$, on a $a = 3 > 0$. La fonction admet donc un minimum, égal à 4 .

Pour $h(x) = -2(x - 5)^2 + 1$, on a $a = -2 < 0$. La fonction admet donc un maximum, égal à 1 .

Pour $p(x) = \frac{1}{2}(x + 3)^2 - 6$, on a $a = \frac{1}{2} > 0$. La fonction admet donc un minimum, égal à -6 .

Conclusion. Si $a > 0$, l'extremum est un minimum. Si $a < 0$, l'extremum est un maximum.

Exercice 11

Énoncé Compléter les tableaux de variations.

$$x \mapsto (x - 2)^2 - 3 \quad \text{et} \quad x \mapsto -2(x + 1)^2 + 4.$$

Correction.

Pour :

$$x \mapsto (x - 2)^2 - 3,$$

on a $a = 1 > 0$, donc la parabole est tournée vers le haut. Elle admet un minimum égal à -3 , atteint pour $x = 2$.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$(x - 2)^2 - 3$	$+\infty$	-3	$+\infty$

Pour :

$$x \mapsto -2(x + 1)^2 + 4,$$

on a $a = -2 < 0$, donc la parabole est tournée vers le bas. Elle admet un maximum égal à 4 , atteint pour $x = -1$.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$-2(x + 1)^2 + 4$	$-\infty$	4	$-\infty$

Conclusion. Le signe de a détermine le sens de variation autour du sommet.

Exercice 12

Énoncé Tracer dans le repère, avec une allure soignée, les paraboles de sommets $S_1(2; -2)$ et $S_2(-1; 3)$. La première est tournée vers le haut, la seconde vers le bas.

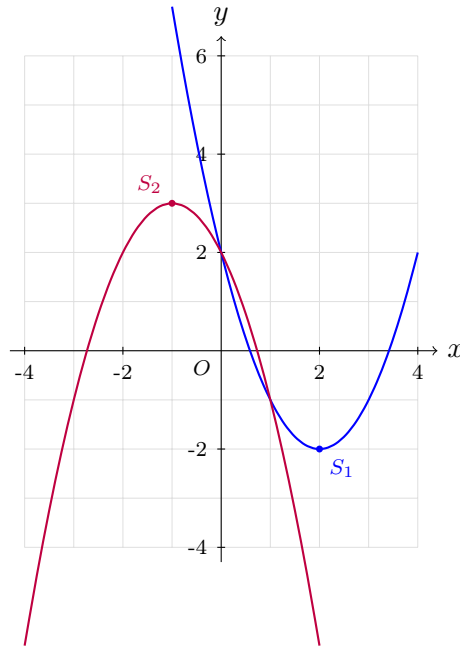
Correction.

Une parabole tournée vers le haut et de sommet $S_1(2; -2)$ peut être représentée par :

$$y = (x - 2)^2 - 2.$$

Une parabole tournée vers le bas et de sommet $S_2(-1; 3)$ peut être représentée par :

$$y = -(x + 1)^2 + 3.$$



Conclusion. Le sommet fixe la position de la parabole ; le signe de a fixe son orientation.

Exercice 13

Énoncé Lire graphiquement le sommet, l'axe de symétrie, l'extremum et le sens de variation de la fonction représentée.

Correction.

Sur le graphique, on lit que le sommet est environ :

$$S(2; -2).$$

L'axe de symétrie est donc :

$$x = 2.$$

La parabole est tournée vers le haut, donc l'extremum est un minimum. Sa valeur est -2 .

La fonction est décroissante jusqu'à $x = 2$, puis croissante après $x = 2$.

Conclusion. La fonction est décroissante sur $] -\infty; 2]$, croissante sur $[2; +\infty[$, et son minimum vaut -2 , atteint pour $x = 2$.

Exercice 14

Énoncé Même consigne : lire le sommet, l'axe de symétrie, l'extremum et le sens de variation. Préciser le signe de a .

Correction.

Sur le graphique, on lit que le sommet est environ :

$$S(-1; 3).$$

L'axe de symétrie est donc :

$$x = -1.$$

La parabole est tournée vers le bas, donc l'extremum est un maximum. Sa valeur est 3.

Comme la parabole est tournée vers le bas, on a :

$$a < 0.$$

La fonction est croissante jusqu'à $x = -1$, puis décroissante après $x = -1$.

Conclusion. La fonction est croissante sur $] -\infty; -1]$, décroissante sur $[-1; +\infty[$, et son maximum vaut 3, atteint pour $x = -1$. De plus, $a < 0$.

Exercice 15

Énoncé On considère $f(x) = 2(x - 3)^2 - 5$.

1. Calculer $f(0)$, $f(3)$, $f(6)$.
2. Expliquer pourquoi $f(0) = f(6)$ était prévisible.
3. Donner deux nombres ayant la même image que $x = 1$.

Correction.

$$f(0) = 2(0 - 3)^2 - 5 = 2 \times 9 - 5 = 13.$$

$$f(3) = 2(3 - 3)^2 - 5 = -5.$$

$$f(6) = 2(6 - 3)^2 - 5 = 2 \times 9 - 5 = 13.$$

L'axe de symétrie est $x = 3$. Les nombres 0 et 6 sont symétriques par rapport à 3, car :

$$\frac{0 + 6}{2} = 3.$$

Il était donc prévisible que :

$$f(0) = f(6).$$

Le nombre 1 est à distance 2 de l'axe $x = 3$. Son symétrique par rapport à cet axe est 5. Donc :

$$f(1) = f(5).$$

Conclusion.

$$f(0) = 13, \quad f(3) = -5, \quad f(6) = 13.$$

Deux nombres ayant la même image que 1 sont 1 et 5.

Exercice 16

Énoncé Soit $g(x) = -(x + 2)^2 + 9$.

1. Donner le maximum de g et la valeur de x pour laquelle il est atteint.
2. Résoudre mentalement $g(x) = 9$.
3. Résoudre $g(x) = 5$ en utilisant la forme canonique.

Correction.

On identifie :

$$a = -1, \quad \alpha = -2, \quad \beta = 9.$$

Comme $a < 0$, la fonction admet un maximum égal à 9, atteint pour $x = -2$.

Réolvons :

$$g(x) = 9.$$

$$-(x+2)^2 + 9 = 9 \iff -(x+2)^2 = 0 \iff (x+2)^2 = 0 \iff x = -2.$$

Donc :

$$\mathcal{S} = \{-2\}.$$

Réolvons maintenant :

$$g(x) = 5.$$

$$-(x+2)^2 + 9 = 5 \iff -(x+2)^2 = -4 \iff (x+2)^2 = 4.$$

Donc :

$$x+2 = -2 \quad \text{ou} \quad x+2 = 2.$$

Ainsi :

$$x = -4 \quad \text{ou} \quad x = 0.$$

Conclusion. Le maximum de g vaut 9, atteint pour $x = -2$. L'équation $g(x) = 5$ a pour ensemble de solutions :

$$\mathcal{S} = \{-4; 0\}.$$

C — Choisir, corriger, transformer

Exercice 17

Énoncé Corriger les affirmations fausses et expliquer l'erreur.

1. Pour $f(x) = (x+4)^2 - 1$, le sommet est $S(4; -1)$.
2. Pour $g(x) = -3(x-2)^2 + 5$, le maximum vaut -3 .
3. Pour $h(x) = 2(x+1)^2 + 7$, l'axe de symétrie est $x = 1$.

Correction.

L'affirmation 1 est fausse. On écrit :

$$f(x) = (x+4)^2 - 1 = (x - (-4))^2 - 1.$$

Le sommet est donc :

$$S(-4; -1).$$

L'affirmation 2 est fausse. Pour :

$$g(x) = -3(x-2)^2 + 5,$$

on a $a = -3 < 0$, donc la fonction admet un maximum. Ce maximum vaut 5. Le nombre -3 est le coefficient a , pas la valeur du maximum.

L'affirmation 3 est fausse. On écrit :

$$h(x) = 2(x+1)^2 + 7 = 2(x - (-1))^2 + 7.$$

L'axe de symétrie est donc :

$$x = -1.$$

Conclusion. Les corrections sont :

$$S(-4; -1), \quad \max g = 5, \quad \text{axe de } h : x = -1.$$

Exercice 18

Énoncé Écrire sous forme canonique, puis donner le sommet.

$$\text{a) } x^2 + 6x + 2 \quad \text{b) } x^2 - 10x + 7 \quad \text{c) } x^2 + 4x - 1 \quad \text{d) } x^2 - 2x + 8$$

Correction.

$$x^2 + 6x + 2 = (x + 3)^2 - 9 + 2 = (x + 3)^2 - 7.$$

Le sommet est $S(-3; -7)$.

$$x^2 - 10x + 7 = (x - 5)^2 - 25 + 7 = (x - 5)^2 - 18.$$

Le sommet est $S(5; -18)$.

$$x^2 + 4x - 1 = (x + 2)^2 - 4 - 1 = (x + 2)^2 - 5.$$

Le sommet est $S(-2; -5)$.

$$x^2 - 2x + 8 = (x - 1)^2 - 1 + 8 = (x - 1)^2 + 7.$$

Le sommet est $S(1; 7)$.

Conclusion.

$$\begin{aligned} x^2 + 6x + 2 &= (x + 3)^2 - 7, & x^2 - 10x + 7 &= (x - 5)^2 - 18, \\ x^2 + 4x - 1 &= (x + 2)^2 - 5, & x^2 - 2x + 8 &= (x - 1)^2 + 7. \end{aligned}$$

Exercice 19

Énoncé Écrire sous forme canonique.

$$\text{a) } 2x^2 - 8x + 3 \quad \text{b) } -x^2 + 6x - 2 \quad \text{c) } 3x^2 + 12x + 5 \quad \text{d) } -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 1$$

Correction.

$$2x^2 - 8x + 3 = 2(x^2 - 4x) + 3.$$

Or :

$$x^2 - 4x = (x - 2)^2 - 4.$$

Donc :

$$2x^2 - 8x + 3 = 2((x - 2)^2 - 4) + 3 = 2(x - 2)^2 - 5.$$

$$-x^2 + 6x - 2 = -(x^2 - 6x) - 2.$$

Or :

$$x^2 - 6x = (x - 3)^2 - 9.$$

Donc :

$$-x^2 + 6x - 2 = -((x - 3)^2 - 9) - 2 = -(x - 3)^2 + 7.$$

$$3x^2 + 12x + 5 = 3(x^2 + 4x) + 5.$$

Or :

$$x^2 + 4x = (x + 2)^2 - 4.$$

Donc :

$$3x^2 + 12x + 5 = 3((x + 2)^2 - 4) + 5 = 3(x + 2)^2 - 7.$$

$$-\frac{1}{2}x^2 + 2x + 1 = -\frac{1}{2}(x^2 - 4x) + 1.$$

Or :

$$x^2 - 4x = (x - 2)^2 - 4.$$

Donc :

$$-\frac{1}{2}x^2 + 2x + 1 = -\frac{1}{2}((x - 2)^2 - 4) + 1 = -\frac{1}{2}(x - 2)^2 + 3.$$

Conclusion.

$$2x^2 - 8x + 3 = 2(x - 2)^2 - 5,$$

$$-x^2 + 6x - 2 = -(x - 3)^2 + 7,$$

$$3x^2 + 12x + 5 = 3(x + 2)^2 - 7,$$

$$-\frac{1}{2}x^2 + 2x + 1 = -\frac{1}{2}(x - 2)^2 + 3.$$

Exercice 20

Énoncé On considère

$$f(x) = x^2 - 6x + 5 = (x - 3)^2 - 4.$$

Dire quelle forme est la plus adaptée pour :

1. calculer rapidement $f(0)$;
2. lire le minimum ;
3. donner l'axe de symétrie ;
4. calculer $f(10)$.

Correction.

Pour calculer rapidement $f(0)$, la forme développée est adaptée :

$$f(0) = 0^2 - 6 \times 0 + 5 = 5.$$

Pour lire le minimum, la forme canonique est la plus adaptée :

$$f(x) = (x - 3)^2 - 4.$$

Comme $(x - 3)^2 \geq 0$, le minimum vaut -4 , atteint pour $x = 3$.

Pour donner l'axe de symétrie, la forme canonique est la plus adaptée :

$$x = 3.$$

Pour calculer $f(10)$, la forme canonique est efficace :

$$f(10) = (10 - 3)^2 - 4 = 7^2 - 4 = 45.$$

Conclusion. La forme développée est pratique pour certains calculs directs ; la forme canonique est la plus efficace pour lire le sommet, l'axe et l'extremum.

Exercice 21

Énoncé Une parabole est tournée vers le haut, son sommet est $S(1; -3)$, et elle passe par le point $A(3; 5)$. Déterminer une expression de la fonction sous forme canonique.

Correction.

La parabole est tournée vers le haut, et son sommet est :

$$S(1; -3).$$

Une forme canonique possible est donc :

$$f(x) = a(x - 1)^2 - 3,$$

avec $a > 0$.

Elle passe par $A(3; 5)$, donc :

$$f(3) = 5.$$

On résout :

$$a(3 - 1)^2 - 3 = 5 \iff 4a - 3 = 5 \iff 4a = 8 \iff a = 2.$$

Conclusion. Une expression de la fonction est :

$$f(x) = 2(x - 1)^2 - 3.$$

Exercice 22

Énoncé Pour tout réel m , on définit

$$f_m(x) = (x - m)^2 + 2.$$

1. Quel est le sommet de la parabole associée ?
2. Que se passe-t-il lorsque m augmente ?
3. Déterminer m pour que l'axe de symétrie soit $x = -4$.

Correction.

On identifie :

$$a = 1, \quad \alpha = m, \quad \beta = 2.$$

Le sommet est donc :

$$S(m; 2).$$

Lorsque m augmente, l'abscisse du sommet augmente. La parabole se déplace donc vers la droite.

L'axe de symétrie est :

$$x = m.$$

Pour que cet axe soit $x = -4$, il faut :

$$m = -4.$$

Conclusion. Le sommet est $S(m; 2)$. Lorsque m augmente, la parabole se translate vers la droite. Pour obtenir l'axe $x = -4$, il faut $m = -4$.

Exercice 23

Énoncé Démontrer que, pour tout réel x ,

$$x^2 - 4x + 7 \geq 3.$$

Préciser le cas d'égalité.

Correction.

On fait apparaître un carré :

$$x^2 - 4x + 7 = (x - 2)^2 - 4 + 7 = (x - 2)^2 + 3.$$

Or, pour tout réel x ,

$$(x - 2)^2 \geq 0.$$

Donc :

$$(x - 2)^2 + 3 \geq 3.$$

Ainsi :

$$x^2 - 4x + 7 \geq 3.$$

Le cas d'égalité a lieu lorsque :

$$(x - 2)^2 = 0 \iff x = 2.$$

Conclusion. Pour tout réel x ,

$$x^2 - 4x + 7 \geq 3.$$

L'égalité a lieu pour $x = 2$.

Exercice 24

Énoncé On considère

$$p(x) = x^2 + bx + c.$$

On sait que la parabole a pour sommet $S(2; -5)$.

1. Écrire $p(x)$ sous forme canonique.
2. En déduire b et c en développant.
3. Vérifier que l'abscisse du sommet vaut bien $-\frac{b}{2}$.

Correction.

Comme le coefficient de x^2 vaut 1 et que le sommet est $S(2; -5)$, on écrit :

$$p(x) = (x - 2)^2 - 5.$$

On développe :

$$p(x) = x^2 - 4x + 4 - 5 = x^2 - 4x - 1.$$

Donc :

$$b = -4 \quad \text{et} \quad c = -1.$$

On vérifie l'abscisse du sommet :

$$-\frac{b}{2} = -\frac{-4}{2} = 2.$$

Conclusion.

$$p(x) = (x - 2)^2 - 5 = x^2 - 4x - 1.$$

Ainsi :

$$b = -4, \quad c = -1.$$

D — Problèmes et synthèse

Exercice 25

Énoncé On partage un segment de longueur 10 en deux parties de longueurs x et $10 - x$. On cherche à maximiser le produit

$$A(x) = x(10 - x),$$

pour $0 \leq x \leq 10$.

1. Montrer que $A(x) = -(x - 5)^2 + 25$.
2. En déduire la valeur maximale de $A(x)$.
3. Interpréter le résultat dans la situation.

Correction.

On développe :

$$A(x) = x(10 - x) = 10x - x^2.$$

On met sous forme canonique :

$$A(x) = -(x^2 - 10x).$$

Or :

$$x^2 - 10x = (x - 5)^2 - 25.$$

Donc :

$$A(x) = -((x - 5)^2 - 25) = -(x - 5)^2 + 25.$$

Comme :

$$(x - 5)^2 \geq 0,$$

on a :

$$-(x - 5)^2 \leq 0.$$

Donc :

$$A(x) = -(x - 5)^2 + 25 \leq 25.$$

La valeur maximale est donc 25, atteinte lorsque :

$$x = 5.$$

Dans la situation, cela signifie que le produit est maximal lorsque les deux longueurs sont égales :

$$x = 5 \quad \text{et} \quad 10 - x = 5.$$

Conclusion. La valeur maximale de $A(x)$ est 25, atteinte lorsque le segment est partagé en deux parties égales de longueur 5.

Exercice 26

Énoncé La hauteur, en mètres, d'un ballon au temps t , en secondes, est modélisée par

$$h(t) = -5(t - 2)^2 + 20.$$

Lire le sommet, donner la hauteur maximale, puis déterminer les instants où le ballon est à 15 mètres de hauteur.

Correction.

On identifie :

$$a = -5, \quad \alpha = 2, \quad \beta = 20.$$

Le sommet de la parabole est donc :

$$S(2; 20).$$

Comme $a < 0$, la hauteur maximale vaut 20 mètres. Elle est atteinte pour :

$$t = 2.$$

On cherche les instants où le ballon est à 15 mètres de hauteur :

$$h(t) = 15.$$

On résout :

$$-5(t - 2)^2 + 20 = 15 \iff -5(t - 2)^2 = -5 \iff (t - 2)^2 = 1.$$

Donc :

$$t - 2 = -1 \quad \text{ou} \quad t - 2 = 1.$$

Ainsi :

$$t = 1 \quad \text{ou} \quad t = 3.$$

Conclusion. Le ballon atteint sa hauteur maximale de 20 mètres au bout de 2 secondes. Il est à 15 mètres aux instants :

$$t = 1 \text{ s} \quad \text{et} \quad t = 3 \text{ s}.$$

Exercice 27

Énoncé Une entreprise modélise son bénéfice, en centaines d'euros, par

$$B(q) = -2(q - 6)^2 + 72,$$

où q désigne le nombre de dizaines d'objets vendus.

1. Pour quelle quantité le bénéfice est-il maximal ?
2. Quel est ce bénéfice maximal ?
3. Calculer le bénéfice pour $q = 4$ et $q = 8$, puis expliquer l'égalité obtenue.

Correction.

On identifie :

$$a = -2, \quad \alpha = 6, \quad \beta = 72.$$

Comme $a < 0$, le bénéfice est maximal pour :

$$q = 6.$$

Cela correspond à :

$$6 \text{ dizaines d'objets} = 60 \text{ objets.}$$

Le bénéfice maximal vaut 72 centaines d'euros, soit :

$$7200 \text{ euros.}$$

On calcule :

$$B(4) = -2(4 - 6)^2 + 72 = -2 \times 4 + 72 = 64.$$

$$B(8) = -2(8 - 6)^2 + 72 = -2 \times 4 + 72 = 64.$$

Les bénéfices sont égaux, car 4 et 8 sont symétriques par rapport à l'axe :

$$q = 6.$$

Conclusion. Le bénéfice maximal est de 7200 euros, obtenu pour 60 objets vendus. On a $B(4) = B(8) = 64$, soit 6400 euros.

Exercice 28

Énoncé Trouver toutes les fonctions de la forme

$$f(x) = a(x - 1)^2 + 3$$

dont la courbe passe par le point $M(3; 11)$. Préciser l'orientation de la parabole obtenue.

Correction.

La courbe passe par $M(3; 11)$, ce qui signifie :

$$f(3) = 11.$$

On résout :

$$a(3 - 1)^2 + 3 = 11 \iff 4a + 3 = 11 \iff 4a = 8 \iff a = 2.$$

Donc :

$$f(x) = 2(x - 1)^2 + 3.$$

Comme :

$$a = 2 > 0,$$

la parabole est tournée vers le haut.

Conclusion. Il existe une seule fonction :

$$f(x) = 2(x - 1)^2 + 3.$$

La parabole correspondante est tournée vers le haut.

Exercice 29

Énoncé On considère deux fonctions :

$$f(x) = (x - 2)^2 - 4 \quad \text{et} \quad g(x) = -(x - 2)^2 + 4.$$

Comparer leurs sommets, leurs axes, leurs extrema et leurs variations. Rédiger une conclusion sur le rôle du signe de a .

Correction.

Pour f , on identifie :

$$a = 1, \quad \alpha = 2, \quad \beta = -4.$$

Le sommet est :

$$S_f(2; -4).$$

L'axe de symétrie est :

$$x = 2.$$

Comme $a > 0$, f admet un minimum égal à -4 , atteint pour $x = 2$.

La fonction f est décroissante sur $] -\infty; 2]$, puis croissante sur $[2; +\infty[$.

Pour g , on identifie :

$$a = -1, \quad \alpha = 2, \quad \beta = 4.$$

Le sommet est :

$$S_g(2; 4).$$

L'axe de symétrie est encore :

$$x = 2.$$

Comme $a < 0$, g admet un maximum égal à 4 , atteint pour $x = 2$.

La fonction g est croissante sur $] -\infty; 2]$, puis décroissante sur $[2; +\infty[$.

Conclusion. Les deux fonctions ont le même axe de symétrie $x = 2$, mais leurs paraboles sont orientées en sens opposés. Le signe de a détermine l'orientation de la parabole, le type d'extremum et le sens des variations.

Exercice 30

Énoncé Rédiger une synthèse de cinq à huit lignes expliquant pourquoi la forme canonique est utile. La réponse doit évoquer au moins : sommet, axe de symétrie, extremum, variations et choix de méthode.

Correction.

La forme canonique est utile car elle donne directement le sommet d'une parabole. Dans une expression $a(x - \alpha)^2 + \beta$, le sommet est $S(\alpha; \beta)$ et l'axe de symétrie est $x = \alpha$. Elle permet aussi de lire l'extremum : si $a > 0$, il s'agit d'un minimum ; si $a < 0$, il s'agit d'un maximum. Elle aide à construire le tableau de variations sans calcul compliqué. Enfin, elle permet de choisir une méthode efficace pour résoudre un problème d'optimisation ou une équation simple liée au second degré.

Conclusion. La forme canonique est la forme la plus adaptée pour lire sommet, axe de symétrie, extremum et variations.