

Corrigé détaillé — TD N04

Repérage, vecteurs et colinéarité

Méthode Pour calculer les coordonnées d'un vecteur, on fait toujours **arrivée moins départ**. Si $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$, alors :

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}.$$

Vigilance On évite d'écrire un signe égal entre le nom du vecteur et ses coordonnées. On écrit par exemple :

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

En revanche, on peut écrire une égalité entre deux écritures de coordonnées :

$$\begin{pmatrix} 5 - 2 \\ 4 - (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

A — Réactivation et automatismes contextualisés

Exercice 3

a) Avec $A(1; 2)$ et $B(5; 4)$, on a

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 5 - 1 \\ 4 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

b) Avec $C(-3; 1)$ et $D(2; -2)$, on a

$$\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} 2 - (-3) \\ -2 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

c) Avec $E(4; -1)$ et $F(-2; 3)$, on a

$$\overrightarrow{EF} \begin{pmatrix} -2 - 4 \\ 3 - (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

d) Avec $G(-5; -2)$ et $H(-1; -2)$, on a

$$\overrightarrow{GH} \begin{pmatrix} -1 - (-5) \\ -2 - (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Conclusion.

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{EF} \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{GH} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4

On considère $A(-2; 5)$ et $B(3; 1)$.

On a

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 - (-2) \\ 1 - 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

De même,

$$\overrightarrow{BA} \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Les coordonnées de $\overrightarrow{BA}$ sont les opposées de celles de $\overrightarrow{AB}$. Donc :

$$\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}.$$

Conclusion.

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{BA} \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}.$$

Changer l'ordre inverse le sens du vecteur.

Exercice 6

On donne :

$$\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v} \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

On calcule les coordonnées de $\vec{u} + \vec{v}$:

$$\begin{pmatrix} 3 + (-1) \\ -2 + 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Donc :

$$\vec{u} + \vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

On calcule les coordonnées de $2\vec{u}$:

$$2 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Donc :

$$2\vec{u} \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

On calcule les coordonnées de $-\vec{v}$:

$$-\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Donc :

$$-\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

On calcule les coordonnées de $\vec{u} - \vec{v}$:

$$\begin{pmatrix} 3 - (-1) \\ -2 - 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

Donc :

$$\vec{u} - \vec{v} \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

Conclusion.

$$\vec{u} + \vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad 2\vec{u} \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad -\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \vec{u} - \vec{v} \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

Exercice 7

Propriété utilisée Le milieu I du segment $[AB]$, avec $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$, a pour coordonnées :

$$I\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right).$$

a) Avec $A(1; 5)$ et $B(7; 1)$,

$$I\left(\frac{1+7}{2}; \frac{5+1}{2}\right) = I(4; 3).$$

b) Avec $A(-4; 2)$ et $B(2; -6)$,

$$I\left(\frac{-4+2}{2}; \frac{2+(-6)}{2}\right) = I(-1; -2).$$

c) Avec $A(-3; -1)$ et $B(5; 3)$,

$$I\left(\frac{-3+5}{2}; \frac{-1+3}{2}\right) = I(1; 1).$$

d) Avec $A(0; 7)$ et $B(6; 7)$,

$$I\left(\frac{0+6}{2}; \frac{7+7}{2}\right) = I(3; 7).$$

Conclusion. Les milieux sont :

$$(4; 3), \quad (-1; -2), \quad (1; 1), \quad (3; 7).$$

Exercice 8

L'élève a écrit :

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2-5 \\ -1-4 \end{pmatrix}.$$

Il a fait départ moins arrivée, alors qu'il faut faire arrivée moins départ.

Avec $A(2; -1)$ et $B(5; 4)$, on a :

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 5-2 \\ 4-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Conclusion.

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

L'erreur est d'avoir inversé l'ordre de la soustraction.

B — Applications directes

Exercice 9

Le robot passe de $R(-3; -2)$ à $S(1; 1)$, puis de S à $T(4; 1)$.

On a :

$$\overrightarrow{RS} \begin{pmatrix} 1-(-3) \\ 1-(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

On a aussi :

$$\overrightarrow{ST} \begin{pmatrix} 4-1 \\ 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Enfin :

$$\overrightarrow{RT} \begin{pmatrix} 4 - (-3) \\ 1 - (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

On vérifie :

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Donc :

$$\overrightarrow{RS} + \overrightarrow{ST} = \overrightarrow{RT}.$$

Conclusion. Dans le contexte, le déplacement total de R à T est la somme des deux déplacements successifs.

Exercice 10

Propriété utilisée Dans un repère orthonormé, si $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$, alors :

$$AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2.$$

Comme une longueur est positive, on obtient ensuite :

$$AB = \sqrt{AB^2}.$$

a) Avec $A(0; 0)$ et $B(3; 4)$,

$$AB^2 = (3 - 0)^2 + (4 - 0)^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25.$$

Comme $AB \geq 0$,

$$AB = \sqrt{25} = 5.$$

b) Avec $C(-2; 1)$ et $D(4; 1)$,

$$CD^2 = (4 - (-2))^2 + (1 - 1)^2 = 6^2 + 0^2 = 36.$$

Comme $CD \geq 0$,

$$CD = \sqrt{36} = 6.$$

c) Avec $E(-1; -2)$ et $F(2; 2)$,

$$EF^2 = (2 - (-1))^2 + (2 - (-2))^2 = 3^2 + 4^2 = 25.$$

Comme $EF \geq 0$,

$$EF = \sqrt{25} = 5.$$

d) Avec $G(5; 3)$ et $H(1; 0)$,

$$GH^2 = (1 - 5)^2 + (0 - 3)^2 = (-4)^2 + (-3)^2 = 16 + 9 = 25.$$

Comme $GH \geq 0$,

$$GH = \sqrt{25} = 5.$$

Conclusion.

$$AB = 5, \quad CD = 6, \quad EF = 5, \quad GH = 5.$$

Exercice 11

Propriété utilisée Deux vecteurs de coordonnées

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

sont colinéaires si et seulement si :

$$xy' - yx' = 0.$$

a)

$$\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v} \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

On calcule :

$$2 \times 6 - 3 \times 4 = 12 - 12 = 0.$$

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

b)

$$\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v} \begin{pmatrix} 3 \\ -15 \end{pmatrix}.$$

On calcule :

$$(-1) \times (-15) - 5 \times 3 = 15 - 15 = 0.$$

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

c)

$$\vec{u} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v} \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

On calcule :

$$4 \times (-4) - (-2) \times 6 = -16 + 12 = -4 \neq 0.$$

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

d)

$$\vec{u} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v} \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

Ces deux vecteurs ont une abscisse nulle. Ils sont donc verticaux, donc colinéaires.

Conclusion. Les vecteurs sont colinéaires dans les cas a), b) et d), mais pas dans le cas c).

Exercice 13

a) Avec $A(1;2)$, $B(3;5)$ et $C(5;8)$, on a :

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3-1 \\ 5-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

et

$$\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 5-1 \\ 8-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

On calcule :

$$2 \times 6 - 3 \times 4 = 12 - 12 = 0.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Conclusion. Les points A , B et C sont alignés.

b) Avec $D(-1; 4)$, $E(2; 1)$ et $F(5; -3)$, on a :

$$\overrightarrow{DE} \begin{pmatrix} 2 - (-1) \\ 1 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

et

$$\overrightarrow{DF} \begin{pmatrix} 5 - (-1) \\ -3 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

On calcule :

$$3 \times (-7) - (-3) \times 6 = -21 + 18 = -3 \neq 0.$$

Conclusion. Les points D , E et F ne sont pas alignés.

c) Avec $G(0; 0)$, $H(2; -6)$ et $I(-1; 3)$, on a :

$$\overrightarrow{GH} \begin{pmatrix} 2 - 0 \\ -6 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix}$$

et

$$\overrightarrow{GI} \begin{pmatrix} -1 - 0 \\ 3 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

On observe que :

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{GH}$ et $\overrightarrow{GI}$ sont donc colinéaires.

Conclusion. Les points G , H et I sont alignés.

d) Avec $J(1; 1)$, $K(4; 2)$ et $L(7; 4)$, on a :

$$\overrightarrow{JK} \begin{pmatrix} 4 - 1 \\ 2 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et

$$\overrightarrow{JL} \begin{pmatrix} 7 - 1 \\ 4 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

On calcule :

$$3 \times 3 - 1 \times 6 = 9 - 6 = 3 \neq 0.$$

Conclusion. Les points J , K et L ne sont pas alignés.

Exercice 14

1. Avec $A(0; 1)$, $B(3; 3)$, $C(-1; -2)$ et $D(5; 2)$, on a :

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 - 0 \\ 3 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

et

$$\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} 5 - (-1) \\ 2 - (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Or :

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Conclusion. Les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

2. Avec $A(2; -1)$, $B(6; 1)$, $C(-3; 4)$ et $D(1; 7)$, on a :

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 6 - 2 \\ 1 - (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

et

$$\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} 1 - (-3) \\ 7 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

On calcule :

$$4 \times 3 - 2 \times 4 = 12 - 8 = 4 \neq 0.$$

Les vecteurs ne sont pas colinéaires.

Conclusion. Les droites (AB) et (CD) ne sont pas parallèles.

3. Avec $A(-2; 0)$, $B(1; 4)$, $C(0; -1)$ et $D(3; 3)$, on a :

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 - (-2) \\ 4 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

et

$$\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} 3 - 0 \\ 3 - (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont les mêmes coordonnées.

Conclusion. Les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

Exercice 16

On considère :

$$A(-3; -1), \quad B(1; 0), \quad C(3; 3), \quad D(-1; 2).$$

On a :

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 - (-3) \\ 0 - (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On a aussi :

$$\overrightarrow{DC} \begin{pmatrix} 3 - (-1) \\ 3 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ ont les mêmes coordonnées, donc :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}.$$

De plus :

$$\overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} -1 - (-3) \\ 2 - (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

et

$$\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 3 - 1 \\ 3 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BC}$ ont les mêmes coordonnées, donc :

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}.$$

Conclusion. Le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.

C — Entraînement approfondi

Exercice 18

On considère :

$$A(-2; 1), \quad B(4; 2), \quad C(5; -1), \quad D(-1; -2).$$

Le milieu de $[AC]$ est :

$$I\left(\frac{-2+5}{2}; \frac{1+(-1)}{2}\right) = I\left(\frac{3}{2}; 0\right).$$

Le milieu de $[BD]$ est :

$$J\left(\frac{4+(-1)}{2}; \frac{2+(-2)}{2}\right) = J\left(\frac{3}{2}; 0\right).$$

Les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ ont le même milieu.

Conclusion. Le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.

Exercice 19

On connaît :

$$A(-3; 2) \quad \text{et} \quad \vec{u}\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

1. On cherche $B(x_B; y_B)$ tel que :

$$\overrightarrow{AB} = \vec{u}.$$

Or :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - (-3) \\ y_B - 2 \end{pmatrix}.$$

On impose donc l'égalité des coordonnées :

$$\begin{pmatrix} x_B + 3 \\ y_B - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Ainsi :

$$x_B + 3 = 5 \quad \text{et} \quad y_B - 2 = -4.$$

Donc :

$$x_B = 2, \quad y_B = -2.$$

$$B(2; -2).$$

2. On cherche $C(x_C; y_C)$ tel que :

$$\overrightarrow{CA} = \vec{u}.$$

Or :

$$\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix} -3 - x_C \\ 2 - y_C \end{pmatrix}.$$

On impose :

$$\begin{pmatrix} -3 - x_C \\ 2 - y_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Ainsi :

$$-3 - x_C = 5 \quad \text{et} \quad 2 - y_C = -4.$$

Donc :

$$x_C = -8, \quad y_C = 6.$$

$$C(-8; 6).$$

Conclusion.

$$B(2; -2) \quad \text{et} \quad C(-8; 6).$$

Les deux questions ne donnent pas le même point car le vecteur $\overrightarrow{AB}$ part de A , tandis que le vecteur $\overrightarrow{CA}$ arrive en A .

Exercice 22

On donne :

$$\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v} \begin{pmatrix} k \\ 15 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs sont colinéaires si et seulement si :

$$2 \times 15 - 5 \times k = 0.$$

On résout :

$$30 - 5k = 0 \iff -5k = -30 \iff k = 6.$$

Pour $k = 6$, on a :

$$\vec{v} \begin{pmatrix} 6 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

Or :

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 15 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Donc :

$$\vec{v} = 3\vec{u}.$$

Conclusion.

$$k = 6 \quad \text{et} \quad \vec{v} = 3\vec{u}.$$

Exercice 23

On considère :

$$A(1; 2), \quad B(5; 4), \quad C(t; 8).$$

On a :

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 5-1 \\ 4-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

On a aussi :

$$\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} t-1 \\ 8-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t-1 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Les points A , B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

On impose :

$$4 \times 6 - 2(t-1) = 0.$$

On résout :

$$24 - 2(t - 1) = 0 \iff 24 - 2t + 2 = 0 \iff 26 - 2t = 0 \iff t = 13.$$

Conclusion. Pour $t = 13$, les points A , B et C sont alignés.

D — Synthèse, problèmes et prises d'initiative

Exercice 25

On considère :

$$A(-3; -2), \quad B(1; 1), \quad C(4; 3), \quad D(-1; 0).$$

On a :

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 - (-3) \\ 1 - (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

On a aussi :

$$\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 4 - 1 \\ 3 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Enfin :

$$\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 4 - (-3) \\ 3 - (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Pour savoir si D est sur le trajet direct de A vers C , on teste l'alignement de A , D et C .

On a :

$$\overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} -1 - (-3) \\ 0 - (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AC}$ seraient colinéaires si :

$$2 \times 5 - 2 \times 7 = 0.$$

Or :

$$2 \times 5 - 2 \times 7 = 10 - 14 = -4 \neq 0.$$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

Conclusion. Le point D n'est pas sur le trajet direct de A vers C .

Le passage par B ne change pas le déplacement total, car :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

C'est la relation de Chasles.

Exercice 27

On considère :

$$A(-2; 1), \quad B(4; 3), \quad C(2; -3).$$

On calcule d'abord les carrés des longueurs.

$$AB^2 = (4 - (-2))^2 + (3 - 1)^2 = 6^2 + 2^2 = 36 + 4 = 40.$$

$$AC^2 = (2 - (-2))^2 + (-3 - 1)^2 = 4^2 + (-4)^2 = 16 + 16 = 32.$$

$$BC^2 = (2 - 4)^2 + (-3 - 3)^2 = (-2)^2 + (-6)^2 = 4 + 36 = 40.$$

Comme les longueurs sont positives :

$$AB = \sqrt{40} = 2\sqrt{10},$$

$$AC = \sqrt{32} = 4\sqrt{2},$$

$$BC = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}.$$

On a donc :

$$AB = BC.$$

Le triangle ABC est isocèle en B .

Pour savoir s'il est rectangle, on compare les carrés des longueurs :

$$AB^2 = 40, \quad AC^2 = 32, \quad BC^2 = 40.$$

Aucune somme de deux de ces nombres ne donne le troisième :

$$40 + 32 \neq 40, \quad 40 + 40 \neq 32.$$

Conclusion. Le triangle ABC est isocèle en B , mais il n'est pas rectangle. Une figure seule ne suffit pas à conclure, car elle peut être imprécise.

Exercice 28

On considère :

$$A(-4; 1), \quad B(2; 4), \quad C(4; 0), \quad D(-2; -3).$$

1. Pour les chemins (AB) et (DC) , on a :

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 - (-4) \\ 4 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

et

$$\overrightarrow{DC} \begin{pmatrix} 4 - (-2) \\ 0 - (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ ont les mêmes coordonnées, donc :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}.$$

Conclusion. Les chemins (AB) et (DC) sont parallèles.

2. Pour les chemins (AD) et (BC) , on a :

$$\overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} -2 - (-4) \\ -3 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

et

$$\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 4 - 2 \\ 0 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BC}$ ont les mêmes coordonnées, donc :

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}.$$

Conclusion. Les chemins (AD) et (BC) sont parallèles.

3. Les deux paires de côtés opposés sont parallèles. Donc le parcours $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$ forme un parallélogramme.

Conclusion. Les chemins opposés sont parallèles deux à deux : le parcours forme un parallélogramme.

Exercice 29

On donne :

$$A(-1; 3), \quad B(4; 1), \quad C(2; -2).$$

On cherche $D(x_D; y_D)$ tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

On utilise :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}.$$

On a :

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 - (-1) \\ 1 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

De plus :

$$\overrightarrow{DC} \begin{pmatrix} 2 - x_D \\ -2 - y_D \end{pmatrix}.$$

On impose donc :

$$\begin{pmatrix} 2 - x_D \\ -2 - y_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi :

$$2 - x_D = 5 \quad \text{et} \quad -2 - y_D = -2.$$

Donc :

$$x_D = -3, \quad y_D = 0.$$

Ainsi :

$$D(-3; 0).$$

On vérifie avec les milieux.

Le milieu de $[AC]$ est :

$$I \left(\frac{-1 + 2}{2}; \frac{3 + (-2)}{2} \right) = I \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right).$$

Le milieu de $[BD]$ est :

$$J \left(\frac{4 + (-3)}{2}; \frac{1 + 0}{2} \right) = J \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right).$$

Les diagonales ont le même milieu.

Conclusion. Le point cherché est :

$$D(-3; 0).$$