

Corrigé détaillé — TD N03

Fonctions : lectures et variations

Méthode Pour lire une image sur une courbe, on part de l'abscisse, on rejoint la courbe, puis on lit l'ordonnée. Pour lire un antécédent d'un nombre k , on cherche les abscisses des points de la courbe dont l'ordonnée vaut k . Une lecture graphique est souvent approchée : on utilise alors le symbole $\approx$.

Vigilance Il faut distinguer :

un antécédent : une abscisse, une image : une ordonnée, un point de la courbe : un couple $(x; f(x))$.

A — Réactivation et automatismes contextualisés

Exercice 1

On calcule les images demandées.

a) Pour $f(x) = 2x - 3$,

$$f(4) = 2 \times 4 - 3 = 8 - 3 = 5.$$

b) Pour $g(x) = x^2 - 5$,

$$g(-2) = (-2)^2 - 5 = 4 - 5 = -1.$$

c) Pour $h(x) = 5 - 3x$,

$$h(0) = 5 - 3 \times 0 = 5.$$

d) Pour $p(x) = \frac{x}{2} + 1$,

$$p(6) = \frac{6}{2} + 1 = 3 + 1 = 4.$$

Conclusion.

$$f(4) = 5, \quad g(-2) = -1, \quad h(0) = 5, \quad p(6) = 4.$$

Exercice 2

On complète les phrases avec le vocabulaire adapté.

1. Dans $f(3) = 7$, 3 est un **antécédent** et 7 est son **image**.
2. Dire que 2 est un antécédent de 5 par g signifie :

$$g(2) = 5.$$

3. Résoudre $f(x) = 0$, c'est chercher les **antécédents** de 0, c'est-à-dire les **zéros** de f .

Conclusion. Une image est une valeur de sortie. Un antécédent est une valeur de départ.

Exercice 3

On cherche, pour chaque nombre, un réel x tel que $u(x)$ soit égal au nombre demandé. On a :

$$u(x) = 3x + 1.$$

a) Antécédent de 7.

$$3x + 1 = 7 \iff 3x = 6 \iff x = 2.$$

b) Antécédent de 1.

$$3x + 1 = 1 \iff 3x = 0 \iff x = 0.$$

c) Antécédent de -5.

$$3x + 1 = -5 \iff 3x = -6 \iff x = -2.$$

d) Antécédent de 0.

$$3x + 1 = 0 \iff 3x = -1 \iff x = -\frac{1}{3}.$$

Conclusion. Les antécédents demandés sont :

$$2, \quad 0, \quad -2, \quad -\frac{1}{3}.$$

Exercice 4

Le tableau donne directement les images de certains nombres.

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	3	0	-1	0	3

On lit :

$$f(-2) = 3, \quad f(0) = -1.$$

Les antécédents de 0 sont les valeurs de x pour lesquelles $f(x) = 0$. D'après le tableau :

$$f(-1) = 0 \quad \text{et} \quad f(1) = 0.$$

Donc les antécédents de 0 sont -1 et 1.

Un antécédent de 3 est par exemple -2, car $f(-2) = 3$. On pouvait aussi répondre 2.

Conclusion.

$$f(-2) = 3, \quad f(0) = -1.$$

Les antécédents de 0 sont -1 et 1. Un antécédent de 3 est -2, ou bien 2.

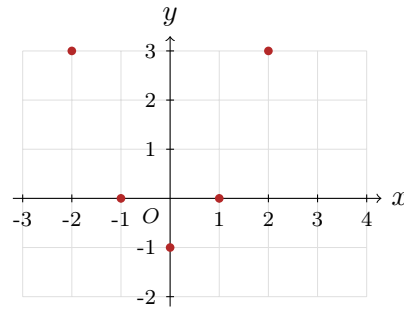
Exercice 5

Chaque colonne du tableau de l'exercice précédent donne un point de la courbe.

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	3	0	-1	0	3

Les points à placer sont donc :

$$(-2; 3), \quad (-1; 0), \quad (0; -1), \quad (1; 0), \quad (2; 3).$$



Conclusion. Placer un point associé à x revient à placer le point de coordonnées $(x; f(x))$.

Exercice 6

On lit les valeurs demandées sur la courbe. Les lectures graphiques sont approchées.

$$f(-3) \approx -1, \quad f(0) \approx 2, \quad f(2) \approx -2.$$

Pour donner un antécédent de 0, on cherche une abscisse d'un point de la courbe situé sur l'axe des abscisses. On peut lire par exemple :

$$x \approx 1.$$

Conclusion.

$$f(-3) \approx -1, \quad f(0) \approx 2, \quad f(2) \approx -2.$$

Un antécédent de 0 est environ 1.

Exercice 7

On utilise les lectures du graphique précédent.

Comme $f(-3) \approx -1$, on a :

$$f(-3) < 0.$$

La courbe est plus haute pour $x = -1$ que pour $x = 0$, donc :

$$f(-1) > f(0).$$

Comme $f(2) \approx -2$ et $f(4) \approx 2$, on a :

$$f(2) < f(4).$$

Enfin, la courbe coupe l'axe des abscisses vers $x = 1$, donc :

$$f(1) = 0$$

à la précision du graphique.

Conclusion.

$$f(-3) < 0, \quad f(-1) > f(0), \quad f(2) < f(4), \quad f(1) = 0.$$

Exercice 8

L'élève écrit :

$$f(2) = -2.$$

Cette égalité signifie que -2 est l'image de 2 par f . Elle signifie aussi que 2 est un antécédent de -2 par f .

L'élève inverse donc image et antécédent.

Conclusion. La phrase correcte est :

« -2 est l'image de 2 par f »

ou encore :

« 2 est un antécédent de -2 par f ».

B — Applications directes

Exercice 9

On donne :

$$f(x) = x^2 - 1.$$

On calcule les images demandées.

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	3	0	-1	0	3

En effet :

$$\begin{aligned} f(-2) &= (-2)^2 - 1 = 3, & f(-1) &= (-1)^2 - 1 = 0, \\ f(0) &= 0^2 - 1 = -1, & f(1) &= 1^2 - 1 = 0, & f(2) &= 2^2 - 1 = 3. \end{aligned}$$

Les points à placer sont :

$$(-2; 3), \quad (-1; 0), \quad (0; -1), \quad (1; 0), \quad (2; 3).$$

Conclusion. Le tableau complété est :

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	3	0	-1	0	3

Exercice 10

On lit sur la courbe.

Pour $x = -3$, la courbe a une ordonnée d'environ -1 , donc :

$$f(-3) \approx -1.$$

Les antécédents de 1 sont les abscisses des points où la courbe coupe la droite horizontale $y = 1$. Par lecture graphique, on obtient environ :

$$x \approx -1,5, \quad x \approx 0, \quad x \approx 3,8.$$

Conclusion.

$$f(-3) \approx -1.$$

Les antécédents approximatifs de 1 sont :

$$-1,5, \quad 0, \quad 3,8.$$

Vigilance Comme ces valeurs sont lues sur une courbe, elles sont approximatives. On utilise donc le symbole $\approx$.

Exercice 11

On résout graphiquement à partir de la même courbe.

a) Résoudre $f(x) = 0$. On cherche les abscisses des points où la courbe coupe l'axe des abscisses. On lit :

$$x = -2, \quad x = 1, \quad x = 3.$$

Ainsi :

$$\mathcal{S} = \{-2; 1; 3\}.$$

b) Résoudre $f(x) > 0$. On cherche les abscisses des points où la courbe est strictement au-dessus de l'axe des abscisses. D'après le graphique :

$$\mathcal{S} =]-2; 1[\cup]3; 4[.$$

c) Résoudre $f(x) < 0$. On cherche les abscisses des points où la courbe est strictement au-dessous de l'axe des abscisses. D'après le graphique :

$$\mathcal{S} = [-3; -2[\cup]1; 3[.$$

Conclusion.

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\iff x \in \{-2; 1; 3\}, \\ f(x) > 0 &\iff x \in]-2; 1[\cup]3; 4[, \\ f(x) < 0 &\iff x \in [-3; -2[\cup]1; 3[. \end{aligned}$$

Exercice 12

Le tableau de signes correspondant à la courbe est :

x	-3	-2	1	3	4
$f(x)$	-	0	+	0	+

Conclusion. La ligne $f(x)$ décrit le signe des valeurs de la fonction, et non les variations de la fonction.

Exercice 13

Le tableau de variations indique les valeurs :

$$f(-3) = -1, \quad f(-1) = 3, \quad f(2) = -2, \quad f(4) = 2.$$

La fonction monte de -3 à -1 , descend de -1 à 2 , puis remonte de 2 à 4 .

- f est croissante sur $[-3; -1]$ et sur $[2; 4]$.
- f est décroissante sur $[-1; 2]$.
- Un maximum local visible est 3 , atteint pour $x = -1$. Un minimum local visible est -2 , atteint pour $x = 2$.

Conclusion.

x	-3	-1	2	4
f		3		2
	-1		-2	

Vigilance Dans un tableau de variations, la ligne se note f , car elle décrit la variation de la fonction. Dans un tableau de signes, la ligne se note $f(x)$, car elle décrit le signe des valeurs.

Exercice 14

On donne :

$$g(x) = -2x + 5.$$

On calcule :

$$g(-1) = -2 \times (-1) + 5 = 2 + 5 = 7,$$

$$g(0) = -2 \times 0 + 5 = 5,$$

$$g(3) = -2 \times 3 + 5 = -6 + 5 = -1.$$

Lorsque x passe de -1 à 0 , puis de 0 à 3 , les images passent de 7 à 5 , puis à -1 . Elles diminuent.

Conclusion.

$$g(-1) = 7, \quad g(0) = 5, \quad g(3) = -1.$$

La fonction g diminue lorsque x augmente. C'est cohérent avec son coefficient directeur $-2 < 0$.

Exercice 15

Les deux courbes se coupent environ au point d'abscisse 4. On lit donc :

$$f(x) = g(x) \iff x \approx 4.$$

La courbe de f est au-dessus de celle de g pour les abscisses situées après leur point d'intersection. Sur le graphique donné, on lit :

$$f(x) > g(x) \quad \text{pour} \quad x \in]4; 6].$$

La courbe qui semble représenter une fonction croissante est celle de f , car elle monte lorsque x augmente.

Conclusion.

$$f(x) = g(x) \quad \text{pour} \quad x \approx 4,$$

et

$$f(x) > g(x) \quad \text{sur environ} \quad]4; 6].$$

La fonction f semble croissante.

Exercice 16

On choisit le registre le plus efficace selon la question.

1. Pour calculer exactement $f(5)$, le registre le plus efficace est l'**expression** de la fonction.

2. Pour lire rapidement les zéros de f , le registre le plus efficace est la **courbe** ou un **tableau de signes**.
3. Pour savoir où $f(x) > 0$, le registre le plus efficace est le **tableau de signes**.
4. Pour décrire où f augmente, le registre le plus efficace est le **tableau de variations**.

Conclusion. On ne choisit pas toujours le même registre : le bon registre dépend de la question posée.

C — Entraînement approfondi

Exercice 17

D'après la courbe, la fonction f est croissante de -3 à -1 , décroissante de -1 à 2 , puis croissante de 2 à 4 .

On lit approximativement :

$$f(-3) \approx -1, \quad f(-1) \approx 3, \quad f(2) \approx -2, \quad f(4) \approx 2.$$

Le tableau de variations est donc :

x	-3	-1	2	4
f	-1	3	-2	2

Conclusion. Le maximum local visible est environ 3 , atteint pour $x \approx -1$. Le minimum local visible est environ -2 , atteint pour $x \approx 2$.

Exercice 18

On donne le tableau de valeurs :

x	-3	-1	0	2	4
$f(x)$	-1	3	$1,4$	-2	2

1. Ce tableau ne suffit pas à connaître toutes les variations de f . Il ne donne que cinq valeurs de la fonction.
2. On peut placer sans ambiguïté les points :

$$(-3; -1), \quad (-1; 3), \quad (0; 1,4), \quad (2; -2), \quad (4; 2).$$

3. On ne peut pas affirmer que f est décroissante sur $[-1; 2]$ seulement avec ce tableau. On sait seulement que :

$$f(-1) = 3, \quad f(0) = 1,4, \quad f(2) = -2.$$

Entre ces abscisses, la fonction pourrait varier autrement.

Conclusion. Un tableau de valeurs ne donne pas automatiquement les variations entre les valeurs affichées.

Exercice 19

On étudie chaque affirmation.

1. « Comme $f(-1) = 3$, alors -1 est l'image de 3. »

Cette affirmation est fausse. L'égalité $f(-1) = 3$ signifie que 3 est l'image de -1 , et que -1 est un antécédent de 3.

2. « Si $f(x) > 0$, alors la courbe est au-dessus de l'axe des abscisses. »

Cette affirmation est vraie. En effet, $f(x)$ est l'ordonnée du point de la courbe d'abscisse x . Si cette ordonnée est positive, le point est au-dessus de l'axe des abscisses.

3. « Si une fonction est croissante, alors toutes ses images sont positives. »

Cette affirmation est fausse. Par exemple, la fonction $x \mapsto x$ est croissante, mais ses images sont négatives pour $x < 0$.

4. « Un tableau de variations suffit toujours à connaître les zéros. »

Cette affirmation est fausse. Un tableau de variations permet de savoir si la fonction monte ou descend, mais il ne donne pas toujours les abscisses exactes des zéros.

Conclusion. Les réponses sont :

faux, vrai, faux, faux.

Exercice 20

La fonction f est définie sur $[-5; 6]$. Ses zéros sont -2 , 1 et 4 . On sait aussi que :

$$f(x) > 0 \quad \text{pour} \quad x \in]-2; 1[\cup]4; 6].$$

Donc $f(x) < 0$ sur les autres intervalles du domaine :

$$[-5; -2[\quad \text{et} \quad]1; 4[.$$

Le tableau de signes est :

x	-5	-2	1	4	6
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$

Conclusion. Les signes sont négatif, positif, négatif, positif, avec annulation en -2 , 1 et 4 .

Exercice 21

Le tableau de variations indique :

$$g(-4) = 2, \quad g(-1) = -3, \quad g(3) = 4, \quad g(5) = 1.$$

1. On compare :

$$g(-4) = 2 \quad \text{et} \quad g(-1) = -3.$$

Donc :

$$g(-4) > g(-1).$$

2. Un minimum local visible est -3 , atteint pour $x = -1$.

3. On ne peut pas connaître précisément le signe de $g(x)$ sur tout l'intervalle. On sait que g passe d'une valeur positive à une valeur négative entre -4 et -1 , puis d'une valeur négative à une valeur positive entre -1 et 3 , mais le tableau ne donne pas les zéros exacts.

Conclusion.

$$g(-4) > g(-1).$$

Un minimum local visible est -3 , atteint en -1 . Le signe complet de $g(x)$ n'est pas déterminé par ce seul tableau.

Exercice 22

On note x le nombre d'heures de location. Comme x est une durée, on a $x \geq 0$.

Le prix est composé de 6 euros de départ puis de 2 euros par heure, donc :

$$P(x) = 6 + 2x.$$

Pour 3 heures :

$$P(3) = 6 + 2 \times 3 = 6 + 6 = 12.$$

On cherche un antécédent de 20, c'est-à-dire une valeur de x telle que $P(x) = 20$.

$$P(x) = 20 \iff 6 + 2x = 20 \iff 2x = 14 \iff x = 7.$$

Conclusion.

$$P(x) = 6 + 2x, \quad P(3) = 12.$$

Un antécédent de 20 par P est 7. Cela signifie qu'une location de 7 heures coûte 20 euros.

Exercice 23

La rédaction proposée est :

« Les zéros de f sont les endroits où la courbe vaut zéro, donc ce sont les points $(-2; 0)$, $(1; 0)$, $(3; 0)$. »

Elle confond les **zéros de la fonction** et les **points de la courbe**.

Les zéros de f sont les nombres x tels que :

$$f(x) = 0.$$

Les points de la courbe correspondants sont les points dont l'ordonnée vaut 0.

Conclusion. Une rédaction correcte est :

Les zéros de f sont les nombres -2 , 1 et 3 .

Les points correspondants de la courbe sont :

$$(-2; 0), \quad (1; 0), \quad (3; 0).$$

Exercice 24

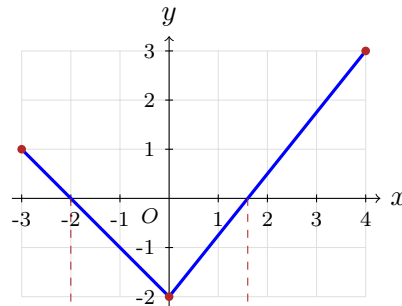
On cherche une courbe possible d'une fonction u définie sur $[-3; 4]$ telle que :

$$u(-3) = 1, \quad u(0) = -2, \quad u(4) = 3.$$

Elle doit être décroissante sur $[-3; 0]$, puis croissante sur $[0; 4]$. Une possibilité est de relier les points :

$$(-3; 1), \quad (0; -2), \quad (4; 3)$$

par deux segments.



Sur le segment reliant $(-3; 1)$ à $(0; -2)$, la fonction coupe l'axe des abscisses une fois. Sur le segment reliant $(0; -2)$ à $(4; 3)$, elle le coupe une deuxième fois.

Conclusion. Cette courbe convient : elle est décroissante sur $[-3; 0]$, croissante sur $[0; 4]$, et l'équation $u(x) = 0$ admet exactement deux solutions.

D — Synthèse, problèmes et prises d'initiative

Exercice 25

Le graphique donne une température entre 6 h et 18 h. Les lectures sont approximatives.

1. On lit environ :

$$T(8) \approx 13^\circ\text{C}, \quad T(12) \approx 25^\circ\text{C}, \quad T(18) \approx 18^\circ\text{C}.$$

2. La température augmente par exemple de 6 h à 14 h. Elle diminue ensuite de 14 h à 18 h.

3. La température maximale est d'environ 29°C , atteinte vers 14 h.

4. La lecture est approximative car on lit sur un graphique : la courbe n'est pas toujours exactement sur une graduation, et l'épaisseur du tracé limite la précision.

Conclusion. La température maximale est environ 29°C , atteinte vers 14 h. Les autres valeurs lues sont des valeurs approchées.

Exercice 26

On note x le nombre de séances.

Le tarif A comprend 12 euros d'inscription puis 3 euros par séance :

$$A(x) = 12 + 3x.$$

Le tarif B comprend 30 euros d'inscription puis 1 euro par séance :

$$B(x) = 30 + x.$$

Graphiquement, les deux droites se croisent vers $x = 9$. Le tarif B devient plus avantageux après ce point, donc à partir de 10 séances si le nombre de séances est entier.

On vérifie par le calcul :

$$B(x) < A(x) \iff 30 + x < 12 + 3x \iff 18 < 2x \iff x > 9.$$

Conclusion. Le tarif B est strictement plus avantageux pour :

$$x > 9.$$

Comme x est un nombre entier de séances, le tarif B devient avantageux à partir de 10 séances.

Méthode Le graphique est efficace pour conjecturer le seuil. Le calcul algébrique est plus rigoureux pour le vérifier exactement.

Exercice 27

On sait que :

$$f(-4) = 2, \quad f(-1) = -3, \quad f(2) = 4, \quad f(5) = 1.$$

La fonction est décroissante sur $[-4; -1]$, croissante sur $[-1; 2]$, puis décroissante sur $[2; 5]$.

Le tableau de variations est donc :

x	-4	-1	2	5
f	2	-3	4	1

Diagramme de variation : Des flèches indiquent la direction de la fonction. Une flèche descendante relie 2 à -3, une flèche ascendante relie -3 à 4, et une flèche descendante relie 4 à 1.

Les extremums locaux visibles sont :

-3 atteint pour $x = -1$,

et

4 atteint pour $x = 2$.

Avec les seules informations données, on ne connaît pas les valeurs exactes des zéros. Si l'on trace une courbe continue compatible avec le tableau, on peut prévoir un zéro entre -4 et -1, puis un autre entre -1 et 2, mais leurs abscisses ne sont pas déterminées.

Une courbe possible est une courbe passant par les points :

$$(-4; 2), \quad (-1; -3), \quad (2; 4), \quad (5; 1)$$

et respectant les sens de variation.

Conclusion. Le minimum local visible est -3, atteint en -1. Le maximum local visible est 4, atteint en 2. Les zéros ne sont pas connus exactement.

Exercice 28

Le graphique représente une distance parcourue en fonction du temps.

On lit que la distance augmente au début : l'élève se déplace. Puis la courbe devient horizontale : la distance reste constante, donc l'élève est à l'arrêt. Ensuite, la distance augmente à nouveau : l'élève repart.

La distance semble constante environ entre 10 min et 20 min.

La vitesse ne semble pas la même au début et à la fin : la courbe est plus pentue au début qu'à la fin. L'élève semble donc aller plus vite au début du trajet qu'à la reprise.

Une question dont la réponse serait une image :

« Quelle distance l'élève a-t-il parcourue au bout de 30 minutes ? »

Une question dont la réponse serait un antécédent :

« À quel moment l'élève a-t-il parcouru 300 mètres ? »

Conclusion. La partie horizontale du graphique traduit un arrêt. La pente de la courbe permet de comparer les vitesses : plus la courbe est pentue, plus la vitesse est grande.

Exercice 29

On peut définir une fonction f par le tableau suivant, sur l'ensemble ordonné des abscisses indiquées :

x	-2	0	1	2	4
$f(x)$	3	2	-1	3	0

On vérifie les conditions.

$$f(0) = 2.$$

Le nombre 3 possède exactement deux antécédents dans ce tableau :

$$-2 \quad \text{et} \quad 2.$$

On a bien une valeur négative :

$$f(1) = -1 < 0.$$

La valeur -1 , atteinte pour $x = 1$, est un minimum local dans le tableau, car :

$$f(0) = 2 > -1 \quad \text{et} \quad f(2) = 3 > -1.$$

Conclusion. Le tableau proposé convient. Il vérifie toutes les conditions demandées.

Trois phrases possibles pour expliquer les lectures :

- La ligne $f(x)$ montre que l'image de 0 est 2.
- Les antécédents de 3 sont les abscisses des colonnes où la valeur de $f(x)$ vaut 3, donc -2 et 2 .
- La valeur -1 est négative et elle est plus petite que les valeurs voisines du tableau, ce qui donne un minimum local visible.

Exercice 30

Une image est une valeur obtenue en appliquant une fonction à un nombre donné. Par exemple, calculer $f(2)$, c'est chercher l'image de 2 par f .

Chercher un antécédent consiste à faire le travail inverse : si l'on cherche les antécédents de 5, on cherche les valeurs de x telles que $f(x) = 5$.

Lire le signe d'une fonction consiste à déterminer où $f(x)$ est positif, nul ou négatif. Sur une courbe, cela revient à regarder si la courbe est au-dessus, sur, ou au-dessous de l'axe des abscisses.

Décrire les variations d'une fonction consiste à dire sur quels intervalles elle augmente, diminue ou reste constante. Un tableau de variations permet de résumer clairement ces informations.

Conclusion. Image, antécédent, signe et variations sont quatre informations différentes sur une fonction. On choisit le registre adapté : expression pour calculer exactement, courbe pour lire, tableau de signes pour le signe, tableau de variations pour les variations.