

Corrigé détaillé – TD N02

Calcul algébrique, équations et inéquations

Première générale – spécialité mathématiques

Chaque énoncé est repris immédiatement avant sa correction.

Méthode Une transformation algébrique doit répondre à un objectif précis : développer pour obtenir une somme, factoriser pour obtenir un produit, réduire pour regrouper les termes de même nature, ou choisir une forme déjà adaptée au calcul demandé. Une équation ou une inéquation se résout par équivalences, de manière à conserver exactement le même ensemble de solutions à chaque étape.

Propriété utilisée Un produit est nul si, et seulement si, l'un de ses facteurs est nul. Un quotient est nul si, et seulement si, son numérateur est nul et son dénominateur ne l'est pas. Lorsqu'on multiplie ou divise les deux membres d'une inégalité par un nombre strictement négatif, le sens de l'inégalité s'inverse.

Vigilance On ne développe pas systématiquement : la forme factorisée facilite la résolution d'une équation-produit, tandis qu'une forme carrée facilite souvent un calcul de valeur ou une étude de signe. Dans un problème, les solutions algébriques doivent toujours être confrontées aux contraintes du contexte.

A – Réactivation et automatismes

Exercice 1

Énoncé

Trois formes, une même expression. On donne

$$H(x) = (x - 3)(x + 1) = x^2 - 2x - 3 = (x - 1)^2 - 4.$$

Associer chaque écriture à son nom, puis choisir la forme la plus efficace pour calculer $H(1)$, résoudre $H(x) = 0$ et lire le coefficient de x^2 .

Les trois écritures de $H(x)$ sont :

$$\underbrace{(x - 3)(x + 1)}_{\text{forme factorisée}}, \quad \underbrace{x^2 - 2x - 3}_{\text{forme développée et réduite}}, \quad \underbrace{(x - 1)^2 - 4}_{\text{forme canonique}}.$$

Pour calculer $H(1)$, la forme canonique est immédiatement adaptée :

$$H(1) = (1 - 1)^2 - 4 = -4.$$

Pour résoudre $H(x) = 0$, la forme factorisée est la plus efficace. On résout dans $\mathbb{R}$:

$$H(x) = 0 \iff (x - 3)(x + 1) = 0 \iff x - 3 = 0 \text{ ou } x + 1 = 0 \iff x = 3 \text{ ou } x = -1.$$

Enfin, la forme développée permet de lire directement le coefficient de x^2 : il vaut 1.

Conclusion. $H(1) = -4$, $\mathcal{S} = \{-1; 3\}$ pour l'équation $H(x) = 0$, et le coefficient de x^2 est 1.

Exercice 2

Énoncé

Rectangle de distributivité. Compléter les quatre aires, puis développer

$$(2x - 3)(x + 4).$$

Recommencer sans dessin avec $(x - 5)(x - 2)$.

	$2x$	-3
x	...	...
4	...	...

Méthode Le rectangle matérialise la double distributivité : chaque terme du premier facteur multiplie chaque terme du second facteur.

Les quatre aires sont :

$$(2x) \times x = 2x^2, \quad (2x) \times 4 = 8x, \quad (-3) \times x = -3x, \quad (-3) \times 4 = -12.$$

	$2x$	-3
x	$2x^2$	$-3x$
4	$8x$	-12

Ainsi,

$$(2x - 3)(x + 4) = 2x^2 + 8x - 3x - 12 = 2x^2 + 5x - 12.$$

De même,

$$(x - 5)(x - 2) = x^2 - 2x - 5x + 10 = x^2 - 7x + 10.$$

Conclusion. $(2x - 3)(x + 4) = 2x^2 + 5x - 12$ et $(x - 5)(x - 2) = x^2 - 7x + 10$.

Exercice 3**Énoncé**

Voir une identité remarquable. À l'aide du carré, compléter :

$$(x + 5)^2 = \dots + \dots + \dots$$

Développer $(3x - 2)^2$, puis factoriser $x^2 + 12x + 36$.

b	ab	b^2
a	a^2	ab
	a	b

Le carré est partagé en quatre régions d'aires x^2 , $5x$, $5x$ et 25 . Par conséquent,

$$(x + 5)^2 = x^2 + 5x + 5x + 25 = x^2 + 10x + 25.$$

En utilisant l'identité $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, on obtient

$$(3x - 2)^2 = (3x)^2 - 2 \times 3x \times 2 + 2^2 = 9x^2 - 12x + 4.$$

Enfin,

$$x^2 + 12x + 36 = x^2 + 2 \times 6x + 6^2 = (x + 6)^2.$$

Conclusion. $(x + 5)^2 = x^2 + 10x + 25$, $(3x - 2)^2 = 9x^2 - 12x + 4$ et $x^2 + 12x + 36 = (x + 6)^2$.

Exercice 4

Énoncé

Développer mentalement, puis contrôler.

$$\begin{array}{lll} a) 3(x + 7) & b) -2(5 - x) & c) (x + 6)(x - 1) \\ d) (2x + 1)(x - 4) & e) (x - 3)^2 & f) (2x + 5)^2 \end{array}$$

On applique la distributivité ou une identité remarquable, puis on réduit.

$$\begin{array}{ll} a) 3(x + 7) = 3x + 21, & \\ b) -2(5 - x) = -10 + 2x = 2x - 10, & \\ c) (x + 6)(x - 1) = x^2 - x + 6x - 6 = x^2 + 5x - 6, & \\ d) (2x + 1)(x - 4) = 2x^2 - 8x + x - 4 = 2x^2 - 7x - 4, & \\ e) (x - 3)^2 = x^2 - 6x + 9, & \\ f) (2x + 5)^2 = 4x^2 + 20x + 25. & \end{array}$$

Conclusion. Les formes développées, réduites et ordonnées sont celles affichées ci-dessus.

Exercice 5

Énoncé

Chasser les fausses règles. Dire si chaque transformation est vraie pour tout réel x . Corriger les lignes fausses.

$$\begin{array}{l} 1) (x + 4)^2 = x^2 + 16 \\ 2) 5(x - 2) = 5x - 10 \\ 3) (x - 7)(x + 7) = x^2 - 49 \\ 4) 2x + 3 = 5x \iff 3 = 3x \\ 5) -4x < 8 \iff x < -2 \\ 6) \frac{x - 1}{x + 2} = 0 \iff x = -2 \end{array}$$

On examine chaque transformation.

1. La transformation est **fausse**. Pour tout réel x ,

$$(x + 4)^2 = x^2 + 8x + 16.$$

Le double produit $8x$ ne doit pas être oublié.

2. La transformation est **vraie**, par distributivité :

$$5(x - 2) = 5x - 10.$$

3. La transformation est **vraie**, car

$$(x - 7)(x + 7) = x^2 - 7^2 = x^2 - 49.$$

4. La transformation est **vraie**. Soustraire $2x$ aux deux membres donne

$$2x + 3 = 5x \iff 3 = 3x.$$

5. La transformation est **fausse**. En divisant par -4 , le sens de l'inégalité s'inverse :

$$-4x < 8 \iff x > -2.$$

6. La transformation est **fausse**. Le quotient est défini pour $x \neq -2$, puis il est nul lorsque son numérateur est nul :

$$\frac{x-1}{x+2} = 0 \iff x-1 = 0 \text{ et } x \neq -2 \iff x = 1.$$

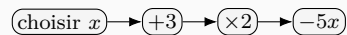
Vigilance La valeur qui annule le dénominateur est une valeur interdite ; elle ne peut jamais être solution de l'équation.

Conclusion. Les lignes 2, 3 et 4 sont vraies. Les lignes 1, 5 et 6 doivent être corrigées comme ci-dessus.

Exercice 6

Énoncé

Programme de calcul. On choisit un réel x et on applique le programme suivant.



1. Écrire le résultat final.
2. Développer et réduire.
3. Traduire « le résultat vaut 0 » par une équation.

Soit $x \in \mathbb{R}$ le nombre choisi.

Après l'ajout de 3, on obtient $x + 3$. Après la multiplication par 2, on obtient $2(x + 3)$. Enfin, on retranche $5x$. Le résultat final est donc

$$2(x + 3) - 5x.$$

En développant et en réduisant,

$$2(x + 3) - 5x = 2x + 6 - 5x = 6 - 3x.$$

L'affirmation « le résultat vaut 0 » se traduit par l'équation

$$2(x + 3) - 5x = 0,$$

ou, de manière équivalente,

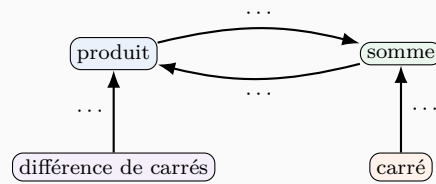
$$6 - 3x = 0.$$

Conclusion. Le programme produit $2(x + 3) - 5x = 6 - 3x$. L'équation associée est $6 - 3x = 0$.

Exercice 7

Énoncé

Carte des transformations. Compléter les flèches par *développer*, *factoriser*, *réduire* ou *utiliser une identité remarquable*.



Donner un exemple pour chacune des quatre flèches.

Les transformations naturelles sont les suivantes :

produit	→	somme	: développer puis réduire,
somme	→	produit	: factoriser,
carré	→	somme	: utiliser une identité remarquable,
différence de carrés	→	produit	: utiliser une identité remarquable.

On peut illustrer chacune de ces flèches par :

$$\begin{aligned}
 (x+2)(x+3) &= x^2 + 5x + 6, \\
 x^2 + 5x + 6 &= (x+2)(x+3), \\
 (x+4)^2 &= x^2 + 8x + 16, \\
 x^2 - 25 &= (x-5)(x+5).
 \end{aligned}$$

Vigilance « Réduire » ne change pas nécessairement la nature globale de l'expression : on regroupe les termes de même nature, par exemple $3x + 2x - 1 = 5x - 1$. Dans la première flèche, le développement est donc suivi d'une réduction.

Conclusion. Les quatre flèches correspondent aux transformations indiquées ci-dessus.

Exercice 8

Énoncé

Calculer sans développer inutilement.

- a) $(x-8)(x+8)$ pour $x=8$
- b) $(x-4)^2 - 9$ pour $x=4$
- c) $(2x+1)(x-5)$ pour $x=0$
- d) $x^2 - 10x + 25$ pour $x=5$

Pour chaque calcul, nommer la forme choisie.

On conserve, dans chaque cas, la forme qui fait apparaître immédiatement le calcul utile.

- a) $(8-8)(8+8) = 0$ (forme factorisée),
- b) $(4-4)^2 - 9 = -9$ (forme canonique),
- c) $(2 \times 0 + 1)(0 - 5) = -5$ (forme factorisée),
- d) $5^2 - 10 \times 5 + 25 = 25 - 50 + 25 = 0$.

Pour la dernière expression, on peut aussi reconnaître l'identité

$$x^2 - 10x + 25 = (x-5)^2,$$

puis calculer $(5 - 5)^2 = 0$.

Conclusion. Les valeurs obtenues sont 0, -9, -5 et 0.

B – Applications directes : transformer et résoudre

Exercice 9

Énoncé

Développer, réduire, ordonner.

$$\begin{array}{ll} a) (4x - 1)(x + 3) & b) (2x - 5)(3x + 1) \\ c) -3x(2x - 7) + 4x & d) (x + 2)^2 - (x - 1)^2 \\ e) (5 - 2x)^2 & f) 3(x - 4)^2 - 2(x + 1) \end{array}$$

On développe, on regroupe les termes de même degré, puis on ordonne suivant les puissances décroissantes de x .

$$\begin{array}{ll} a) (4x - 1)(x + 3) = 4x^2 + 12x - x - 3 = 4x^2 + 11x - 3, \\ b) (2x - 5)(3x + 1) = 6x^2 + 2x - 15x - 5 = 6x^2 - 13x - 5, \\ c) -3x(2x - 7) + 4x = -6x^2 + 21x + 4x = -6x^2 + 25x, \\ d) (x + 2)^2 - (x - 1)^2 = (x^2 + 4x + 4) - (x^2 - 2x + 1) = 6x + 3, \\ e) (5 - 2x)^2 = 25 - 20x + 4x^2 = 4x^2 - 20x + 25, \\ f) 3(x - 4)^2 - 2(x + 1) = 3(x^2 - 8x + 16) - 2x - 2 \\ \quad = 3x^2 - 26x + 46. \end{array}$$

Conclusion. Les formes développées, réduites et ordonnées sont celles affichées ci-dessus.

Exercice 10**Énoncé****Factoriser en choisissant l'outil.**

a) $7x + 21$ b) $5x^2 - 10x$

c) $x^2 - 81$ d) $4x^2 - 12x + 9$

e) $(x + 1)(2x - 3) + (x + 1)(x + 5)$

f) $(3x - 2)^2 - (x + 4)^2$

On identifie successivement un facteur commun ou une identité remarquable.

a) $7x + 21 = 7(x + 3),$

b) $5x^2 - 10x = 5x(x - 2),$

c) $x^2 - 81 = (x - 9)(x + 9),$

d) $4x^2 - 12x + 9 = (2x - 3)^2,$

e) $(x + 1)(2x - 3) + (x + 1)(x + 5) = (x + 1)[(2x - 3) + (x + 5)]$
 $= (x + 1)(3x + 2),$

f) $(3x - 2)^2 - (x + 4)^2 = [(3x - 2) - (x + 4)][(3x - 2) + (x + 4)]$
 $= (2x - 6)(4x + 2)$
 $= 4(x - 3)(2x + 1).$

Conclusion. Les expressions sont factorisées sous les formes indiquées ci-dessus.**Exercice 11****Énoncé****Choisir la bonne forme.** On considère

$$E(x) = (x - 4)^2 - 9 = (x - 7)(x - 1) = x^2 - 8x + 7.$$

Indiquer la forme choisie pour calculer $E(4)$, résoudre $E(x) = 0$, trouver un antécédent de 7 et montrer que $E(x) + 9 \geq 0$.Pour calculer $E(4)$, la forme canonique est la plus directe :

$$E(4) = (4 - 4)^2 - 9 = -9.$$

Pour résoudre $E(x) = 0$, on utilise la forme factorisée :

$$E(x) = 0 \iff (x - 7)(x - 1) = 0 \iff x = 7 \text{ ou } x = 1.$$

Pour chercher les antécédents de 7, la forme développée permet une simplification immédiate :

$$E(x) = 7 \iff x^2 - 8x + 7 = 7$$

 $\iff x^2 - 8x = 0$
 $\iff x(x - 8) = 0$
 $\iff x = 0 \text{ ou } x = 8.$

Enfin, la forme canonique donne

$$E(x) + 9 = (x - 4)^2 \geq 0$$

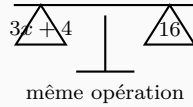
pour tout réel x , puisqu'un carré est toujours positif ou nul.

Conclusion. $E(4) = -9$, les solutions de $E(x) = 0$ sont 1 et 7, et les antécédents de 7 sont 0 et 8.

Exercice 12

Énoncé

Équilibre et équivalences. Le dessin rappelle qu'une même opération est effectuée sur les deux membres.



Résoudre dans $\mathbb{R}$ par équivalences :

- a) $3x + 4 = 16$ b) $7x - 5 = 2x + 20$
 c) $-4x + 9 = 21$ d) $5(2x - 1) = 3x + 16$.

On résout chaque équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ par équivalences.

- a) $3x + 4 = 16 \iff 3x = 12 \iff x = 4$,
 b) $7x - 5 = 2x + 20 \iff 5x = 25 \iff x = 5$,
 c) $-4x + 9 = 21 \iff -4x = 12 \iff x = -3$,
 d) $5(2x - 1) = 3x + 16 \iff 10x - 5 = 3x + 16$
 $\iff 7x = 21 \iff x = 3$.

Conclusion. Les ensembles de solutions sont respectivement $\{4\}$, $\{5\}$, $\{-3\}$ et $\{3\}$.

Exercice 13

Énoncé

Produit nul. Résoudre dans $\mathbb{R}$, puis conclure par $\mathcal{S} = \dots$.

- a) $(x - 5)(x + 2) = 0$ b) $x(3x - 12) = 0$
 c) $(2x + 7)(5 - x) = 0$ d) $(x - 1)^2 = 0$

Propriété utilisée Un produit de nombres réels est nul si, et seulement si, l'un au moins de ses facteurs est nul.

On résout dans $\mathbb{R}$.

- a) $(x - 5)(x + 2) = 0 \iff x - 5 = 0 \text{ ou } x + 2 = 0$
 $\iff x = 5 \text{ ou } x = -2$,
 b) $x(3x - 12) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } 3x - 12 = 0$
 $\iff x = 0 \text{ ou } x = 4$,
 c) $(2x + 7)(5 - x) = 0 \iff 2x + 7 = 0 \text{ ou } 5 - x = 0$
 $\iff x = -\frac{7}{2} \text{ ou } x = 5$,
 d) $(x - 1)^2 = 0 \iff x - 1 = 0 \iff x = 1$.

Conclusion.

$$\text{a) } \mathcal{S} = \{-2; 5\}, \quad \text{b) } \mathcal{S} = \{0; 4\}, \quad \text{c) } \mathcal{S} = \left\{-\frac{7}{2}; 5\right\}, \quad \text{d) } \mathcal{S} = \{1\}.$$

Exercice 14**Énoncé****Mettre sous la forme produit nul.**

$$\text{a) } x^2 - 16 = 0 \quad \text{b) } (x + 3)^2 - 25 = 0$$

$$\text{c) } (x - 2)(x + 4) = 3(x - 2)$$

$$\text{d) } (2x + 1)^2 = (x - 5)^2$$

On transforme chaque équation en une équation-produit nul.

$$\begin{aligned} \text{a) } x^2 - 16 = 0 &\iff (x - 4)(x + 4) = 0 \\ &\iff x = 4 \text{ ou } x = -4. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } (x + 3)^2 - 25 = 0 &\iff [(x + 3) - 5][(x + 3) + 5] = 0 \\ &\iff (x - 2)(x + 8) = 0 \\ &\iff x = 2 \text{ ou } x = -8. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } (x - 2)(x + 4) = 3(x - 2) &\iff (x - 2)(x + 4) - 3(x - 2) = 0 \\ &\iff (x - 2)[(x + 4) - 3] = 0 \\ &\iff (x - 2)(x + 1) = 0 \\ &\iff x = 2 \text{ ou } x = -1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } (2x + 1)^2 = (x - 5)^2 &\iff (2x + 1)^2 - (x - 5)^2 = 0 \\ &\iff [(2x + 1) - (x - 5)][(2x + 1) + (x - 5)] = 0 \\ &\iff (x + 6)(3x - 4) = 0 \\ &\iff x = -6 \text{ ou } x = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Conclusion.

$$\text{a) } \{-4; 4\}, \quad \text{b) } \{-8; 2\}, \quad \text{c) } \{-1; 2\}, \quad \text{d) } \left\{-6; \frac{4}{3}\right\}.$$

Exercice 15**Énoncé****Quotient nul et valeurs interdites.** Préciser les valeurs interdites, puis résoudre.

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{x - 6}{x + 1} = 0 \quad &\text{b) } \frac{2x + 5}{x - 3} = 0 \\ \text{c) } \frac{(x - 4)(x + 2)}{x + 2} = 0. \end{aligned}$$

Méthode Avant de résoudre une équation comportant un quotient, on détermine son ensemble de définition. Un quotient est nul lorsque son numérateur est nul et son dénominateur non nul.

a) La valeur interdite est -1 . Pour $x \neq -1$,

$$\frac{x-6}{x+1} = 0 \iff x-6=0 \iff x=6.$$

La valeur 6 est autorisée.

b) La valeur interdite est 3. Pour $x \neq 3$,

$$\frac{2x+5}{x-3} = 0 \iff 2x+5=0 \iff x=-\frac{5}{2}.$$

La valeur $-\frac{5}{2}$ est autorisée.

c) La valeur interdite est -2 . Pour $x \neq -2$,

$$\frac{(x-4)(x+2)}{x+2} = 0 \iff (x-4)(x+2)=0 \iff x=4 \text{ ou } x=-2.$$

La valeur -2 est interdite ; seule la valeur 4 convient.

Conclusion.

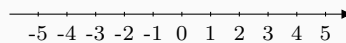
$$\text{a) } \mathcal{S} = \{6\}, \quad \text{b) } \mathcal{S} = \left\{-\frac{5}{2}\right\}, \quad \text{c) } \mathcal{S} = \{4\}.$$

Exercice 16

Énoncé

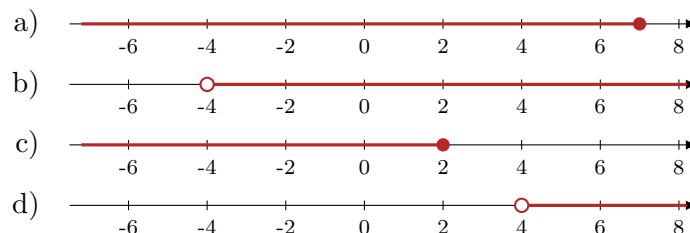
Inéquations du premier degré. Résoudre dans $\mathbb{R}$, écrire un intervalle et représenter les solutions sur une droite graduée.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } 2x - 5 \leq 9 & \text{b) } -3x + 4 < 16 \\ \text{c) } 7 - 2x \geq x + 1 & \text{d) } 5(x - 1) > 2x + 7 \end{array}$$



On résout chaque inéquation dans $\mathbb{R}$.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } 2x - 5 \leq 9 \iff 2x \leq 14 \iff x \leq 7, & \\ \text{b) } -3x + 4 < 16 \iff -3x < 12 \iff x > -4, & \\ \text{c) } 7 - 2x \geq x + 1 \iff 6 \geq 3x \iff x \leq 2, & \\ \text{d) } 5(x - 1) > 2x + 7 \iff 5x - 5 > 2x + 7 & \\ & \iff 3x > 12 \iff x > 4. \end{array}$$



Conclusion.

$$\text{a) }]-\infty; 7], \quad \text{b) }]-4; +\infty[, \quad \text{c) }]-\infty; 2], \quad \text{d) }]4; +\infty[.$$

Exercice 17**Énoncé**

Justifier une équivalence. Compléter l'opération effectuée :

$$\begin{aligned} 5x - 8 = 17 &\iff 5x = 25 & (\dots) \\ -2x \geq 14 &\iff x \leq -7 & (\dots) \\ (x - 3)(x + 1) = 0 &\iff x = 3 \text{ ou } x = -1 & (\dots) \end{aligned}$$

Puis résoudre $4(x - 2) = 3x + 9$ et $-6x + 1 \leq 19$.

Les opérations effectuées sont :

$$\begin{aligned} 5x - 8 = 17 &\iff 5x = 25 && \text{on ajoute 8 aux deux membres,} \\ -2x \geq 14 &\iff x \leq -7 && \text{on divise par } -2 \text{ et on inverse le sens,} \\ (x - 3)(x + 1) = 0 &\iff x = 3 \text{ ou } x = -1 && \text{on utilise la propriété du produit nul.} \end{aligned}$$

On résout ensuite les deux inéquations demandées.

$$\begin{aligned} 4(x - 2) = 3x + 9 &\iff 4x - 8 = 3x + 9 \\ &\iff x = 17. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -6x + 1 \leq 19 &\iff -6x \leq 18 \\ &\iff x \geq -3. \end{aligned}$$

Conclusion. La première équation a pour unique solution 17. La seconde inéquation a pour ensemble de solutions $[-3; +\infty[$.

Exercice 18**Énoncé**

Équations avec préparation. Transformer d'abord le membre de gauche, puis résoudre.

$$\begin{aligned} a) & (x + 2)^2 - (x - 2)^2 = 24 \\ b) & (3x - 1)^2 - (3x + 1)^2 = 8 \\ c) & (x + 5)(x - 5) - x^2 = 10 \\ d) & (2x - 3)(x + 1) - 2x^2 = 7 \end{aligned}$$

On commence par simplifier le membre de gauche.

a)

$$\begin{aligned} (x + 2)^2 - (x - 2)^2 &= [(x + 2) - (x - 2)][(x + 2) + (x - 2)] \\ &= 4 \times 2x = 8x. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$(x + 2)^2 - (x - 2)^2 = 24 \iff 8x = 24 \iff x = 3.$$

b)

$$\begin{aligned} (3x - 1)^2 - (3x + 1)^2 &= [(3x - 1) - (3x + 1)][(3x - 1) + (3x + 1)] \\ &= (-2) \times 6x = -12x. \end{aligned}$$

Donc

$$(3x - 1)^2 - (3x + 1)^2 = 8 \iff -12x = 8 \iff x = -\frac{2}{3}.$$

c)

$$(x+5)(x-5) - x^2 = x^2 - 25 - x^2 = -25.$$

L'équation devient $-25 = 10$, ce qui est impossible. Elle n'admet aucune solution.

d)

$$\begin{aligned}(2x-3)(x+1) - 2x^2 &= 2x^2 + 2x - 3x - 3 - 2x^2 \\ &= -x - 3.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$-x - 3 = 7 \iff -x = 10 \iff x = -10.$$

Conclusion.

$$\text{a) } \{3\}, \quad \text{b) } \left\{-\frac{2}{3}\right\}, \quad \text{c) } \emptyset, \quad \text{d) } \{-10\}.$$

Exercice 19

Énoncé

Billets de musée. Une classe paie 48 € de réservation puis 7 € par élève. La facture est de 237 €. Déterminer le nombre d'élèves et contrôler la cohérence de la réponse.



Soit n le nombre d'élèves de la classe. Comme il s'agit d'un effectif, n est un entier naturel.

La facture comprend 48 euros de réservation et 7 euros par élève. Elle se traduit par l'équation

$$48 + 7n = 237.$$

On résout :

$$48 + 7n = 237 \iff 7n = 189 \iff n = 27.$$

La valeur obtenue est un entier naturel. De plus,

$$48 + 7 \times 27 = 48 + 189 = 237,$$

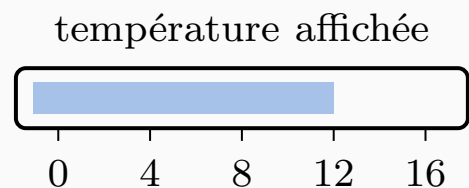
ce qui contrôle la cohérence du résultat.

Conclusion. La classe compte 27 élèves.

Exercice 20

Énoncé

Chaîne du froid. Une sonde affiche $T = 18 - 2t$, où t est le nombre d'heures écoulées. Pendant combien de temps a-t-on $T > 4$? Interpréter l'intervalle obtenu.



Le temps écoulé t est un nombre réel positif ou nul. On cherche donc les valeurs de $t \geq 0$ pour lesquelles

$$18 - 2t > 4.$$

On résout :

$$18 - 2t > 4 \iff -2t > -14 \iff t < 7.$$

Lors de la division par -2 , le sens de l'inégalité est inversé.

En tenant compte de la contrainte $t \geq 0$, on obtient

$$t \in [0; 7[.$$

À l'instant $t = 7$, la température vaut exactement 4, donc cette valeur n'appartient pas à l'intervalle recherché.

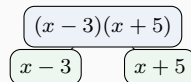
Conclusion. La température reste strictement supérieure à 4 pendant les sept premières heures, c'est-à-dire pour $t \in [0; 7[$.

C – Entraînement approfondi : choisir et justifier

Exercice 21

Énoncé

Arbre d'expression. L'arbre montre que l'expression $F(x) = (x - 3)(x + 5)$ est d'abord un produit.



1. Développer F .
2. Résoudre $F(x) = 0$.
3. Calculer $F(3)$, $F(-5)$ et $F(0)$ en choisissant la forme utile.

1. Développement.

$$F(x) = (x - 3)(x + 5) = x^2 + 5x - 3x - 15 = x^2 + 2x - 15.$$

2. Résolution de $F(x) = 0$. La forme factorisée est adaptée :

$$F(x) = 0 \iff (x - 3)(x + 5) = 0 \iff x = 3 \text{ ou } x = -5.$$

3. Calculs de valeurs. La forme factorisée fait apparaître immédiatement les facteurs nuls :

$$F(3) = (3 - 3)(3 + 5) = 0, \quad F(-5) = (-5 - 3)(-5 + 5) = 0.$$

Enfin,

$$F(0) = (0 - 3)(0 + 5) = -15.$$

Conclusion. $F(x) = x^2 + 2x - 15$, $\mathcal{S} = \{-5; 3\}$, $F(3) = 0$, $F(-5) = 0$ et $F(0) = -15$.

Exercice 22

Énoncé

Même résultat, deux méthodes. Résoudre

$$(x + 6)^2 = (x - 2)^2$$

d'abord en développant, puis en utilisant une différence de carrés. Comparer les deux démarches.

Première méthode : développer.

On résout dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}(x+6)^2 &= (x-2)^2 \iff x^2 + 12x + 36 = x^2 - 4x + 4 \\ &\iff 16x = -32 \\ &\iff x = -2.\end{aligned}$$

Deuxième méthode : utiliser une différence de carrés.

$$\begin{aligned}(x+6)^2 &= (x-2)^2 \iff (x+6)^2 - (x-2)^2 = 0 \\ &\iff [(x+6) - (x-2)][(x+6) + (x-2)] = 0 \\ &\iff 8(2x+4) = 0 \\ &\iff 2x+4 = 0 \\ &\iff x = -2.\end{aligned}$$

Méthode Les deux démarches sont correctes. La seconde est plus structurée : elle reconnaît immédiatement une différence de carrés et évite de développer deux carrés complets.

Conclusion. L'équation admet pour unique solution $x = -2$.

Exercice 23

Énoncé

Aire variable. Un rectangle a pour longueur $x+7$ et pour largeur $x-1$, avec $x > 1$.

1. Écrire son aire sous formes factorisée et développée.
2. Déterminer x lorsque l'aire du rectangle est égale à celle d'un rectangle de dimensions 4 et $x+7$.
3. Pour quelles valeurs de x le périmètre dépasse-t-il 30 ?

On suppose $x > 1$, de sorte que la longueur $x+7$ et la largeur $x-1$ soient strictement positives.

1. Aire du rectangle. La forme factorisée est donnée par les dimensions :

$$A(x) = (x+7)(x-1).$$

En développant,

$$A(x) = x^2 - x + 7x - 7 = x^2 + 6x - 7.$$

2. Égalité d'aires. L'autre rectangle a pour aire $4(x+7)$. On résout :

$$\begin{aligned}(x+7)(x-1) &= 4(x+7) \iff (x+7)(x-1) - 4(x+7) = 0 \\ &\iff (x+7)(x-5) = 0 \\ &\iff x = -7 \text{ ou } x = 5.\end{aligned}$$

La contrainte $x > 1$ exclut $x = -7$. Ainsi, $x = 5$. Les dimensions sont alors 12 et 4.

3. Périmètre supérieur à 30. Le périmètre vaut

$$P(x) = 2[(x+7) + (x-1)] = 2(2x+6) = 4x+12.$$

On résout :

$$4x+12 > 30 \iff 4x > 18 \iff x > \frac{9}{2}.$$

Cette condition implique déjà $x > 1$.

Conclusion. $A(x) = (x+7)(x-1) = x^2 + 6x - 7$. L'égalité des aires donne $x = 5$. Le périmètre dépasse 30 pour $x > \frac{9}{2}$.

Exercice 24**Énoncé**

Retrouver une expression cachée. Une expression vérifie

$$P(x) = (x + a)(x + b) = x^2 + 5x + 6.$$

Déterminer les entiers a et b , résoudre $P(x) = 0$, puis inventer une autre expression de même type.

En développant la forme factorisée, on obtient

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab.$$

L'égalité

$$(x + a)(x + b) = x^2 + 5x + 6$$

impose donc

$$a + b = 5 \quad \text{et} \quad ab = 6.$$

Les deux entiers dont la somme vaut 5 et le produit vaut 6 sont 2 et 3. Ainsi,

$$\{a, b\} = \{2, 3\}$$

et

$$P(x) = (x + 2)(x + 3).$$

On résout :

$$P(x) = 0 \iff (x + 2)(x + 3) = 0 \iff x = -2 \text{ ou } x = -3.$$

Par exemple, une autre expression de même type est

$$(x + 1)(x + 4) = x^2 + 5x + 4.$$

Conclusion. Les valeurs de a et b sont 2 et 3, dans un ordre quelconque. Les solutions de $P(x) = 0$ sont -3 et -2 .

Exercice 25**Énoncé**

Inéquations et pièges de signe. Résoudre dans $\mathbb{R}$ et souligner l'étape où le sens de l'inégalité change.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & -5x + 11 \leq -9 \quad \text{b)} \quad 4 - 2(3x - 1) > 18 \\ \text{c)} & \frac{x - 3}{5} < 2 \quad \text{d)} \quad -\frac{x + 4}{3} \geq 2 \end{array}$$

On résout dans $\mathbb{R}$, en signalant explicitement les divisions par un nombre négatif.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad -5x + 11 \leq -9 &\iff -5x \leq -20 \\ &\iff \boxed{x \geq 4} \quad (\text{division par } -5). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad 4 - 2(3x - 1) > 18 &\iff 4 - 6x + 2 > 18 \\ &\iff -6x > 12 \\ &\iff \boxed{x < -2} \quad (\text{division par } -6). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad \frac{x - 3}{5} < 2 &\iff x - 3 < 10 \quad (\text{multiplication par } 5 > 0) \\ &\iff x < 13. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d) } -\frac{x+4}{3} &\geq 2 \iff -(x+4) \geq 6 \quad (\text{multiplication par } 3 > 0) \\
 &\iff -x \geq 10 \\
 &\iff \boxed{x \leq -10} \quad (\text{multiplication par } -1).
 \end{aligned}$$

Conclusion.

$$\text{a) } [4; +\infty[, \quad \text{b) }]-\infty; -2[, \quad \text{c) }]-\infty; 13[, \quad \text{d) }]-\infty; -10].$$

Exercice 26

Énoncé

Démontrer une identité. Démontrer que, pour tout réel x ,

$$(x+3)^2 - (x-3)^2 = 12x.$$

Puis choisir deux entiers a et b pour que $(x+a)^2 - (x-b)^2$ se réduise à une expression affine.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On développe les deux carrés :

$$\begin{aligned}
 (x+3)^2 - (x-3)^2 &= (x^2 + 6x + 9) - (x^2 - 6x + 9) \\
 &= x^2 + 6x + 9 - x^2 + 6x - 9 \\
 &= 12x.
 \end{aligned}$$

L'identité est donc démontrée pour tout réel x .

Plus généralement, pour deux entiers a et b ,

$$\begin{aligned}
 (x+a)^2 - (x-b)^2 &= [(x+a) - (x-b)][(x+a) + (x-b)] \\
 &= (a+b)(2x+a-b),
 \end{aligned}$$

qui est une expression affine en x .

Par exemple, avec $a = 2$ et $b = 1$,

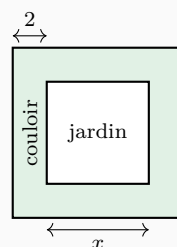
$$(x+2)^2 - (x-1)^2 = 3(2x+1) = 6x+3.$$

Conclusion. L'identité demandée est vraie pour tout réel x . Un exemple convenable est $a = 2$, $b = 1$, donnant $6x+3$.

Exercice 27

Énoncé

Le couloir autour d'un jardin. Un jardin carré de côté x est entouré d'un couloir de largeur 2.



Exprimer l'aire du couloir de deux façons, prouver que les expressions obtenues sont égales, puis déterminer x lorsque cette aire vaut 64.

Le jardin a pour côté x , avec $x > 0$. Le couloir mesure 2 de large sur chacun des quatre côtés. Le grand carré a donc pour côté

$$x + 2 + 2 = x + 4.$$

Première expression de l'aire du couloir. On soustrait l'aire du jardin à celle du grand carré :

$$A(x) = (x + 4)^2 - x^2.$$

Deuxième expression. Le couloir peut être décomposé en quatre bandes de dimensions $x \times 2$ et quatre carrés de côté 2 :

$$A(x) = 4(2x) + 4(2^2) = 8x + 16.$$

Ces expressions sont égales car

$$(x + 4)^2 - x^2 = x^2 + 8x + 16 - x^2 = 8x + 16.$$

Lorsque l'aire du couloir vaut 64, on résout :

$$8x + 16 = 64 \iff 8x = 48 \iff x = 6.$$

Cette valeur est strictement positive, donc elle convient au contexte.

Conclusion. L'aire du couloir vaut $(x + 4)^2 - x^2 = 8x + 16$. Elle est égale à 64 lorsque le jardin a pour côté $x = 6$.

Exercice 28

Énoncé

Paramètre discret. Pour un entier k , on pose $P_k(x) = (x - k)(x + 2)$.

1. Pour quelles valeurs de k , le nombre 3 est-il solution de $P_k(x) = 0$?
2. Pour quelles valeurs de k , le nombre -2 est-il solution ?
3. Choisir k pour que $P_k(0) = 10$.

On rappelle que k est un entier.

1. Le nombre 3 est solution.

$$\begin{aligned} P_k(3) = 0 &\iff (3 - k)(3 + 2) = 0 \\ &\iff 5(3 - k) = 0 \\ &\iff k = 3. \end{aligned}$$

2. Le nombre -2 est solution. Pour tout entier k ,

$$P_k(-2) = (-2 - k)(-2 + 2) = (-2 - k) \times 0 = 0.$$

Ainsi, -2 est solution pour toute valeur entière de k .

3. Condition $P_k(0) = 10$.

$$P_k(0) = (0 - k)(0 + 2) = -2k.$$

On résout

$$-2k = 10 \iff k = -5.$$

Conclusion. 3 est solution uniquement pour $k = 3$; -2 est solution pour tout entier k ; enfin $P_k(0) = 10$ pour $k = -5$.

D – Synthèse, problèmes et prises d'initiative

Exercice 29

Énoncé

Galerie des formes. On considère

$$G(x) = (x + 4)^2 - (x - 2)^2.$$

Sans suivre un ordre imposé, obtenir une forme factorisée et une forme développée, puis choisir la plus efficace pour calculer $G(0)$, résoudre $G(x) = 0$, $G(x) = 60$ et $G(x) > 0$.

On reconnaît une différence de carrés :

$$\begin{aligned} G(x) &= (x + 4)^2 - (x - 2)^2 \\ &= [(x + 4) - (x - 2)][(x + 4) + (x - 2)] \\ &= 6(2x + 2) \\ &= 12(x + 1). \end{aligned}$$

La forme factorisée est donc $12(x + 1)$, et la forme développée est

$$G(x) = 12x + 12.$$

Calcul de $G(0)$.

$$G(0) = 12(0 + 1) = 12.$$

Résolution de $G(x) = 0$.

$$12(x + 1) = 0 \iff x = -1.$$

Résolution de $G(x) = 60$.

$$12(x + 1) = 60 \iff x + 1 = 5 \iff x = 4.$$

Résolution de $G(x) > 0$.

$$12(x + 1) > 0 \iff x + 1 > 0 \iff x > -1,$$

car 12 est strictement positif.

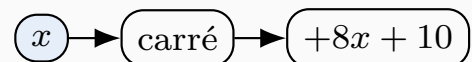
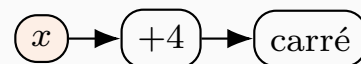
Conclusion. $G(x) = 12(x + 1) = 12x + 12$, $G(0) = 12$, $G(x) = 0$ pour $x = -1$, $G(x) = 60$ pour $x = 4$, et $G(x) > 0$ pour $x > -1$.

Exercice 30

Énoncé

Deux programmes concurrents. A : ajouter 4, puis mettre au carré.

B : mettre au carré, puis ajouter $8x + 10$. Comparer les résultats pour tout réel x . Peuvent-ils être égaux ?



Soit $x \in \mathbb{R}$ le nombre choisi.

Le programme A produit

$$A(x) = (x + 4)^2 = x^2 + 8x + 16.$$

Le programme B produit

$$B(x) = x^2 + 8x + 10.$$

On compare les deux résultats :

$$A(x) - B(x) = (x^2 + 8x + 16) - (x^2 + 8x + 10) = 6.$$

Ainsi, pour tout réel x ,

$$A(x) = B(x) + 6.$$

Pour rechercher une éventuelle égalité, on résout :

$$A(x) = B(x) \iff x^2 + 8x + 16 = x^2 + 8x + 10 \iff 16 = 10,$$

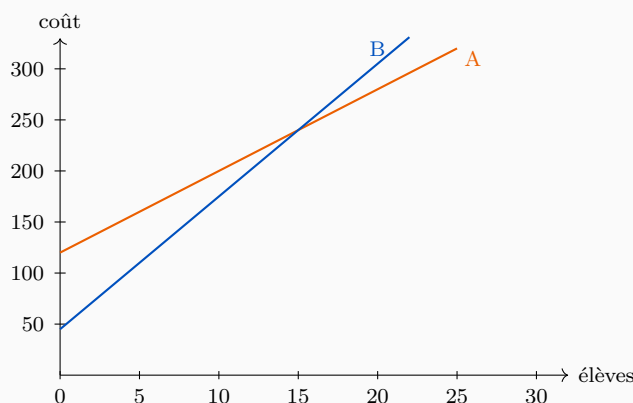
ce qui est impossible.

Conclusion. Le programme A donne toujours un résultat supérieur de 6 à celui du programme B. Les deux résultats ne sont jamais égaux.

Exercice 31

Énoncé

Deux salles pour une soirée. La salle A facture 120 € puis 8 € par élève ; la salle B facture 45 € puis 13 € par élève.



Choisir une démarche parmi tableau, graphique ou algèbre pour conjecturer le seuil, puis le démontrer par une inéquation et interpréter l'entier obtenu.

Soit n le nombre d'élèves, avec $n \in \mathbb{N}$.

Les coûts, en euros, sont

$$A(n) = 120 + 8n \quad \text{et} \quad B(n) = 45 + 13n.$$

Le graphique permet de conjecturer une intersection pour $n = 15$. Vérifions-la algébriquement :

$$\begin{aligned} A(n) = B(n) &\iff 120 + 8n = 45 + 13n \\ &\iff 75 = 5n \\ &\iff n = 15. \end{aligned}$$

Pour $n = 15$,

$$A(15) = B(15) = 240.$$

Pour déterminer quand la salle A est au moins aussi avantageuse que la salle B, on résout :

$$\begin{aligned} A(n) \leq B(n) &\iff 120 + 8n \leq 45 + 13n \\ &\iff 75 \leq 5n \\ &\iff n \geq 15. \end{aligned}$$

Comme n est entier :

- pour moins de 15 élèves, la salle B est moins chère ;
- pour 15 élèves, les deux salles coûtent 240 euros ;
- à partir de 16 élèves, la salle A est strictement moins chère.

Conclusion. Le seuil d'égalité est 15 élèves. La salle A devient strictement plus avantageuse à partir de 16 élèves.

Exercice 32

Énoncé

Mini-débat mathématique. Un élève veut résoudre

$$(x - 3)(x + 7) = 4(x - 3)$$

en écrivant $x - 3 = 4$ ou $x + 7 = x - 3$. Expliquer l'erreur, proposer une résolution correcte et inventer une équation proche où le produit nul s'applique immédiatement.

L'élève utilise à tort la propriété du produit nul. Cette propriété s'applique uniquement à une équation de la forme

$$A(x)B(x) = 0,$$

et non à une égalité entre deux expressions non nulles.

On commence donc par tout ramener dans un même membre :

$$\begin{aligned}(x - 3)(x + 7) = 4(x - 3) &\iff (x - 3)(x + 7) - 4(x - 3) = 0 \\ &\iff (x - 3)[(x + 7) - 4] = 0 \\ &\iff (x - 3)(x + 3) = 0 \\ &\iff x = 3 \text{ ou } x = -3.\end{aligned}$$

Une équation proche où le produit nul s'applique immédiatement est, par exemple,

$$(x - 3)(x + 7) = 0.$$

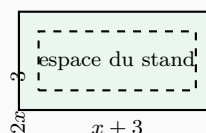
Elle a pour solutions 3 et -7 .

Conclusion. L'équation initiale a pour ensemble de solutions $\mathcal{S} = \{-3; 3\}$.

Exercice 33

Énoncé

Kiosque de fête : problème ouvert. Un stand rectangulaire doit avoir un périmètre de 36 m. Une longueur est notée $x + 3$ et la largeur $2x - 3$.



Déterminer les dimensions possibles, vérifier qu'elles sont positives, puis proposer une modification de l'énoncé donnant un autre stand de périmètre 36 m.

Soit $x \in \mathbb{R}$. La longueur vaut $x + 3$ et la largeur vaut $2x - 3$.

Le périmètre vaut 36 mètres, donc

$$2[(x + 3) + (2x - 3)] = 36.$$

On résout :

$$\begin{aligned} 2[(x+3) + (2x-3)] &= 36 \iff 2(3x) = 36 \\ &\iff 6x = 36 \\ &\iff x = 6. \end{aligned}$$

Les dimensions correspondantes sont

$$x+3=9 \quad \text{et} \quad 2x-3=9.$$

Elles sont toutes deux strictement positives. Le stand est donc un carré de côté 9 mètres.

Une modification possible consiste à prendre pour dimensions $x+4$ et $2x-4$, toujours avec un périmètre de 36 mètres. On obtient alors

$$2[(x+4) + (2x-4)] = 36 \iff 6x = 36 \iff x = 6,$$

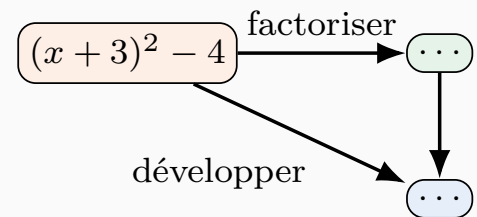
d'où un stand de dimensions 10 mètres sur 8 mètres.

Conclusion. Dans l'énoncé initial, $x = 6$ et le stand mesure 9 m sur 9 m. Une modification possible donne un stand de 10 m sur 8 m.

Exercice 34

Énoncé

Méto des formes. Pour $K(x) = (x+3)^2 - 4$, compléter les stations, résoudre $K(x) = 0$, calculer $K(-3)$, puis ajouter une nouvelle question qui rend utile la troisième forme.



On part de la forme

$$K(x) = (x+3)^2 - 4.$$

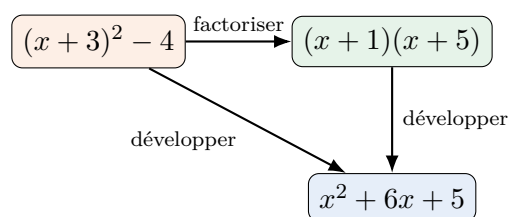
En utilisant une différence de carrés,

$$\begin{aligned} K(x) &= (x+3)^2 - 2^2 \\ &= [(x+3) - 2][(x+3) + 2] \\ &= (x+1)(x+5). \end{aligned}$$

La forme factorisée est donc $(x+1)(x+5)$.

En développant,

$$K(x) = x^2 + 6x + 9 - 4 = x^2 + 6x + 5.$$



Pour résoudre $K(x) = 0$, on utilise la forme factorisée :

$$K(x) = 0 \iff (x+1)(x+5) = 0 \iff x = -1 \text{ ou } x = -5.$$

Pour calculer $K(-3)$, la forme initiale est la plus efficace :

$$K(-3) = (-3 + 3)^2 - 4 = -4.$$

Une question rendant utile la forme développée peut être :

« Calculer $K(0)$. »

En effet, la forme développée donne immédiatement

$$K(0) = 0^2 + 6 \times 0 + 5 = 5.$$

Conclusion. $K(x) = (x + 1)(x + 5) = x^2 + 6x + 5$, $\mathcal{S} = \{-5; -1\}$, $K(-3) = -4$ et $K(0) = 5$.

- Avant tout calcul, identifier la structure de l'expression et choisir une forme adaptée à la question.
- Dans une équation ou une inéquation, chaque transformation doit conserver exactement le même ensemble de solutions.
- Avant de traiter un quotient, déterminer les valeurs interdites.
- Dans une inéquation, une multiplication ou une division par un nombre négatif inverse le sens de l'inégalité.
- Dans un problème, introduire l'inconnue, traduire la situation, résoudre, puis vérifier les contraintes et conclure par une phrase contextualisée.

© Vincent NICOLLE – CC BY-NC-SA 4.0