

CORRIGÉ DÉTAILLÉ — TD N01

Logique, ensembles, intervalles et diagnostic

Première générale — spécialité mathématiques

Comment utiliser ce corrigé ? Ce document est conçu pour pouvoir être travaillé *sans le professeur à côté*. Pour chaque exercice, l'énoncé est rappelé, puis la méthode est expliquée avant la rédaction détaillée. Les encadrés violets signalent des erreurs réellement fréquentes. Les encadrés orange marquent des méthodes ou idées qui dépassent l'exercice : ce sont des points structurants à retenir pour la suite des mathématiques.

POINT FONDAMENTAL À RETENIR EN MATHÉMATIQUES Six idées reviennent dans tout le TD :

1. respecter les priorités de calcul et utiliser la distributivité avec méthode ;
2. résoudre équations et inéquations par **transformations équivalentes** ;
3. distinguer la nature des objets : élément, ensemble, intervalle ;
4. pour une implication, chercher ce que l'hypothèse permet réellement de conclure ; pour la réfuter, un contre-exemple suffit ;
5. savoir nier correctement « pour tout » et « il existe » ;
6. une équivalence exige toujours les **deux sens**.

A — Réactivation et automatismes contextualisés

Exercice 1

CAL

Énoncé **Calcul sans calculatrice.** Donner le résultat sous la forme la plus simple :

$$\text{a) } 7 - 3 \times 4, \quad \text{b) } 5^2 - 2^4, \quad \text{c) } \frac{3}{4} + \frac{5}{6}, \quad \text{d) } -2(3 - 7).$$

Méthode Avant de calculer, repérer les priorités : puissances, puis multiplications/divisions, puis additions/soustractions. Pour une somme de fractions, chercher un dénominateur commun. Pour un produit devant une parenthèse, calculer d'abord la parenthèse si elle ne contient que des nombres.

a) La multiplication est prioritaire :

$$7 - 3 \times 4 = 7 - 12 = -5.$$

b) Les puissances sont calculées avant la soustraction :

$$5^2 - 2^4 = 25 - 16 = 9.$$

c) Le plus petit dénominateur commun de 4 et 6 est 12 :

$$\frac{3}{4} + \frac{5}{6} = \frac{9}{12} + \frac{10}{12} = \frac{19}{12}.$$

La fraction est irréductible.

d)

$$-2(3 - 7) = -2 \times (-4) = 8.$$

POINT FONDAMENTAL À RETENIR EN MATHÉMATIQUES Les priorités opératoires et le calcul exact sur les fractions sont des automatismes indispensables : une erreur à ce stade fausse ensuite un calcul algébrique, une dérivée, une probabilité ou une résolution.

Erreur type / vigilance Erreurs fréquentes : calculer $7 - 3$ avant 3×4 ; additionner les dénominateurs dans une somme de fractions ; oublier que le produit de deux nombres négatifs est positif.

Conclusion. a) -5 ; b) 9 ; c) $\frac{19}{12}$; d) 8 .

Exercice 2

CAL, REP

Énoncé Rectangle d'aires. Le rectangle aide à développer $(x+4)(x+1)$. Compléter les quatre aires, puis développer et réduire :

a) $(x+4)(x+1)$, b) $3(2x-5)$, c) $(2x-3)^2$, d) $(x-5)(x+5)$.

	x	4
x	x^2	$4x$
1	x	4

Méthode Développer signifie transformer un produit en somme. On multiplie **chaque terme** d'un facteur par **chaque terme** de l'autre facteur, puis on réduit les termes semblables.

a) Le rectangle donne les quatre produits x^2 , $4x$, x et 4 :

$$(x+4)(x+1) = x^2 + x + 4x + 4 = x^2 + 5x + 4.$$

b)

$$3(2x-5) = 3 \times 2x + 3 \times (-5) = 6x - 15.$$

c)

$$(2x-3)^2 = (2x-3)(2x-3) = 4x^2 - 6x - 6x + 9 = 4x^2 - 12x + 9.$$

d)

$$(x-5)(x+5) = x^2 + 5x - 5x - 25 = x^2 - 25.$$

POINT FONDAMENTAL À RETENIR EN MATHÉMATIQUES La distributivité est une méthode fondamentale de calcul littéral. Elle sert ensuite à développer, factoriser, résoudre des équations, comparer des expressions et étudier des fonctions.

Erreur type / vigilance Deux erreurs classiques : écrire $(a-b)^2 = a^2 - b^2$, ce qui est faux en général ; ou oublier un produit dans une double distributivité. Le rectangle permet justement de contrôler que quatre produits ont été pris.

Conclusion. a) $x^2 + 5x + 4$; b) $6x - 15$; c) $4x^2 - 12x + 9$; d) $x^2 - 25$.

Exercice 3

RAI, COM

Énoncé **Assertion, phrase ouverte ou non-sens ?** Pour chaque ligne, préciser la catégorie. Lorsqu'il s'agit d'une assertion, donner sa valeur de vérité et justifier brièvement :

$$7 \in \mathbb{N}, \quad x + 3 = 8, \quad \{2\} \in \mathbb{N}, \quad -1 \in [0; 4], \quad \mathbb{N} \subset \mathbb{R}.$$

Réécrire la troisième ligne pour obtenir une assertion vraie.

Méthode Avant de décider si une phrase est vraie ou fausse, regarder la **nature des objets**. Une assertion doit être une phrase mathématique complète dont on peut déterminer la valeur de vérité. Une phrase contenant une variable non fixée est une phrase ouverte.

Écriture	Nature	Justification
$7 \in \mathbb{N}$	assertion vraie	7 est un entier naturel.
$x + 3 = 8$	phrase ouverte	sans valeur donnée pour x , la phrase peut être vraie ou fausse.
$\{2\} \in \mathbb{N}$	non-sens au niveau étudié	$\{2\}$ est un ensemble, alors que les éléments de $\mathbb{N}$ sont des nombres.
$-1 \in [0; 4]$	assertion fausse	les éléments de $[0; 4]$ sont compris entre 0 et 4.
$\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$	assertion vraie	tout entier naturel est un nombre réel.

Pour rendre la troisième ligne vraie, on peut écrire

$$\boxed{\{2\} \subset \mathbb{N}}.$$

En effet, l'unique élément de l'ensemble $\{2\}$ est 2, et $2 \in \mathbb{N}$.

POINT FONDAMENTAL À RETENIR EN MATHÉMATIQUES En mathématiques, vérifier la **nature des objets** évite beaucoup d'erreurs : un nombre n'est pas un ensemble, un point n'est pas un vecteur, une fonction n'est pas sa valeur en un réel.

Erreur type / vigilance Ne pas confondre $\in$, qui relie un **élément** à un ensemble, et $\subset$, qui compare deux ensembles.

Exercice 4

REP, CAL

Énoncé Le diagramme représente les inclusions usuelles. Inscrire dans la zone la plus précise possible

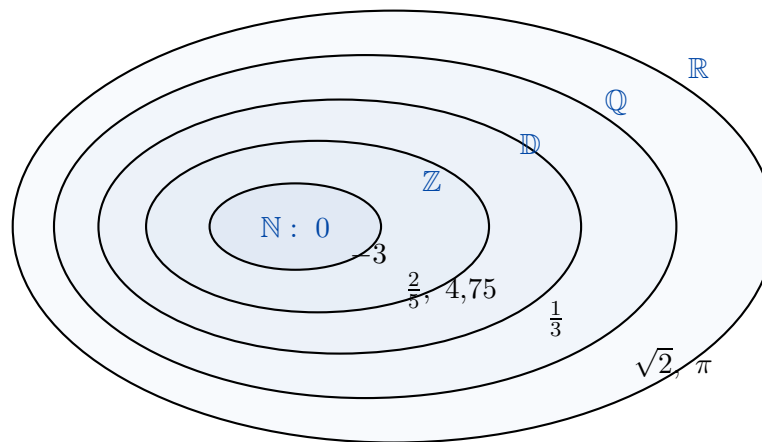
$$-3, \quad 0, \quad \frac{2}{5}, \quad \frac{1}{3}, \quad \sqrt{2}, \quad \pi, \quad 4,75,$$

puis ajouter les noms $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{D}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ dans les cinq ensembles.

Méthode On utilise la chaîne d'inclusions

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Pour placer un nombre dans la zone la plus précise, on cherche le **plus petit ensemble** de cette chaîne auquel il appartient.



- $-3 \in \mathbb{Z}$ mais $-3 \notin \mathbb{N}$.
- $0 \in \mathbb{N}$.
- $\frac{2}{5} = 0,4$ et $4,75$ ont une écriture décimale finie : ils appartiennent à $\mathbb{D}$.
- $\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$, mais son écriture décimale n'est pas finie : $\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$.
- $\sqrt{2}$ et π sont irrationnels : ils appartiennent à $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Erreur type / vigilance Un nombre peut appartenir à plusieurs ensembles. « Zone la plus précise » signifie qu'on le place dans le plus petit ensemble de la chaîne, pas qu'il cesse d'appartenir aux ensembles plus grands.

Exercice 5

REP

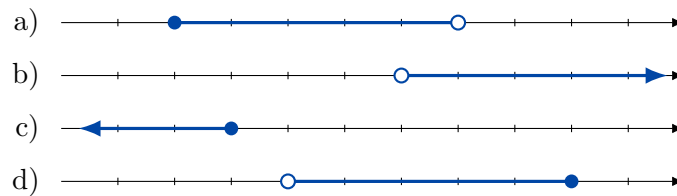
Énoncé Des inégalités aux intervalles. Écrire chaque ensemble sous forme d'intervalle, puis le représenter :

$$\text{a) } -3 \leq x < 2, \quad \text{b) } x > 1, \quad \text{c) } x \leq -2, \quad \text{d) } -1 < x \leq 4.$$

Méthode Pour chaque borne, poser deux questions :

1. la borne est-elle incluse ? Si oui, on utilise un crochet fermé ;
2. l'ensemble continue-t-il vers $-\infty$ ou $+\infty$? L'infini n'est jamais inclus.

$$\begin{aligned} \text{a) } -3 \leq x < 2 &\iff x \in [-3; 2[, \\ \text{b) } x > 1 &\iff x \in]1; +\infty[, \\ \text{c) } x \leq -2 &\iff x \in]-\infty; -2], \\ \text{d) } -1 < x \leq 4 &\iff x \in]-1; 4]. \end{aligned}$$



POINT FONDAMENTAL À RETENIR EN MATHÉMATIQUES Passer sans hésitation entre **phrase, inégalité, intervalle et droite graduée** est un automatisme fondamental : on l'utilise toute l'année pour les ensembles de solutions et les domaines de définition.

Erreur type / vigilance On n'écrit jamais un crochet fermé du côté de $+\infty$ ou $-\infty$: l'infini n'est pas un nombre réel.

Exercice 6

CAL, COM

Énoncé Diagnostic de début d'année. Résoudre dans $\mathbb{R}$ par équivalences et donner l'ensemble des solutions :

$$\text{a) } 3x - 5 = 7, \quad \text{b) } 5 - 2x < 9, \quad \text{c) } 4(x - 1) = 2x + 6, \quad \text{d) } \frac{x + 1}{3} \geq 2.$$

Pour b), écrire explicitement l'opération effectuée sur les deux membres au moment où le sens de l'inégalité change.

POINT FONDAMENTAL À RETENIR EN MATHÉMATIQUES Résoudre une équation ou une inéquation signifie transformer l'énoncé en une suite de problèmes **équivalents**, c'est-à-dire ayant exactement les mêmes solutions. On utilise donc $\iff$ dans une chaîne de résolution.

a)

$$3x - 5 = 7 \iff 3x = 12 \quad (\text{on ajoute 5 aux deux membres}) \iff x = 4 \quad (\text{on divise par } 3 > 0).$$

Ainsi $\mathcal{S} = \{4\}$.

b)

$$5 - 2x < 9 \iff -2x < 4 \quad (\text{on soustrait 5 aux deux membres}).$$

On divise maintenant **les deux membres par** -2 . Comme $-2 < 0$, le sens de l'inégalité change :

$$-2x < 4 \iff x > -2.$$

Donc $\mathcal{S} =]-2; +\infty[$.

c)

$$4(x - 1) = 2x + 6 \iff 4x - 4 = 2x + 6 \iff 2x - 4 = 6 \iff 2x = 10 \iff x = 5.$$

Donc $\mathcal{S} = \{5\}$.

d)

$$\frac{x + 1}{3} \geq 2 \iff x + 1 \geq 6 \iff x \geq 5,$$

car multiplier par $3 > 0$ conserve le sens de l'inégalité. Ainsi

$$\mathcal{S} = [5; +\infty[.$$

Erreur type / vigilance Éviter « je passe -5 de l'autre côté ». Cette phrase masque l'opération réellement faite. Écrire « j'ajoute 5 aux deux membres » permet de contrôler que l'équivalence est conservée. Pour une inéquation, la division ou multiplication par un nombre négatif **inverse le sens**.

Exercice 7

REP, RAI

Énoncé On donne

$$A = \{1; 2; 4\}, \quad B = \{1; 2; 3; 4; 5\}, \quad C = \{2; 4\}.$$

Compléter par $\in$, $\notin$, $\subset$ ou $\not\subset$, puis justifier deux réponses :

$$2 \dots A, \quad C \dots A, \quad 3 \dots A, \quad A \dots B, \quad \{3\} \dots B, \quad 5 \dots C.$$

Méthode Si le membre de gauche est un **nombre**, on utilise $\in$ ou $\notin$. S'il est un **ensemble**, on compare deux ensembles et on utilise $\subset$ ou $\not\subset$.

$$\boxed{2 \in A}, \quad \boxed{C \subset A}, \quad \boxed{3 \notin A},$$

$$\boxed{A \subset B}, \quad \boxed{\{3\} \subset B}, \quad \boxed{5 \notin C}.$$

Par exemple, $C \subset A$ car les deux éléments de C , à savoir 2 et 4, appartiennent à A . De même, $\{3\} \subset B$ car l'unique élément de $\{3\}$ est 3, et $3 \in B$.

POINT FONDAMENTAL À RETENIR EN MATHÉMATIQUES La distinction $\boxed{x \in A}$ / $\boxed{A \subset B}$ est fondamentale en théorie des ensembles. Elle réapparaît en probabilités, en analyse et dans les raisonnements logiques.

Erreur type / vigilance $\{3\}$ n'est pas le nombre 3 : c'est l'ensemble dont l'unique élément est 3. Ainsi $3 \in B$, mais $\{3\} \subset B$.

Exercice 8

RAI, REP

Énoncé **Tableau de vérité simple.** On note P et Q deux assertions. Compléter le tableau pour $\neg P$, P et Q , P ou Q , et $P \Rightarrow Q$. On rappelle que $P \Rightarrow Q$ est fausse dans un seul cas : P vraie et Q fausse. Expliquer ensuite pourquoi une implication dont l'hypothèse est fausse n'est pas contredite.

P	Q	$\neg P$	P et Q	P ou Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	F	V	V	V
V	F	F	F	V	F
F	V	V	F	V	V
F	F	V	F	F	V

Une implication $P \Rightarrow Q$ affirme ce qui se passe **lorsque P est vraie**. Pour la contredire, il faut donc exhiber un cas où P est vraie et Q fausse. Si P est fausse, on n'a pas produit un tel contre-exemple.

POINT FONDAMENTAL À RETENIR EN MATHÉMATIQUES Pour réfuter une implication « si P , alors Q », il faut chercher un cas

P vraie et Q fausse.

C'est le critère logique à retenir.

B — Applications directes

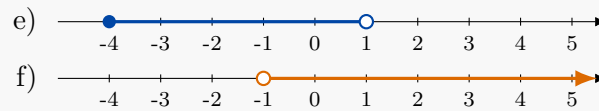
Exercice 9

REP, COM

Énoncé Quatre langages pour un même ensemble. Compléter les lignes suivantes :

- x est au moins -2 ;
- x est strictement entre 1 et 5 ;
- x ne dépasse pas 3 ;
- $x < -1$ ou $x > 4$, à écrire comme réunion de deux intervalles.

Lire ensuite les deux droites :



Pour chacune, écrire la phrase, l'inégalité et l'intervalle.

Phrase	Inégalité	Intervalle
a x est au moins -2	$x \geq -2$	$[-2; +\infty[$
b x est strictement entre 1 et 5	$1 < x < 5$	$]1; 5[$
c x ne dépasse pas 3	$x \leq 3$	$] - \infty; 3]$
d $x < -1$ ou $x > 4$	$x < -1$ ou $x > 4$	$] - \infty; -1[\cup]4; +\infty[$
e x est compris entre -4 inclus et 1 exclu	$-4 \leq x < 1$	$[-4; 1[$
f x est strictement supérieur à -1	$x > -1$	$] - 1; +\infty[$

Méthode Sur une droite graduée, un point plein signifie que la borne est incluse ; un point vide signifie qu'elle est exclue. Une demi-droite qui part vers la droite correspond à des nombres plus grands.

Erreur type / vigilance « Ou » se traduit ici par une **réunion** $\cup$, pas par une intersection.

Exercice 10

REP, RAI

Énoncé On donne $A = [-3; 2]$ et $B =]0; 5[$. Déterminer $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$ et $B \setminus A$, puis représenter les quatre résultats.

Méthode

- $A \cap B$: les éléments qui sont dans A **et** dans B .
 - $A \cup B$: les éléments qui sont dans A **ou** dans B .
 - $A \setminus B$: les éléments de A auxquels on retire ceux qui sont dans B .
- Les bornes doivent être vérifiées une par une.

$$A \cap B =]0; 2].$$

En effet, il faut être strictement supérieur à 0 (condition de B) et inférieur ou égal à 2 (condition de A). Comme les deux intervalles se recouvrent,

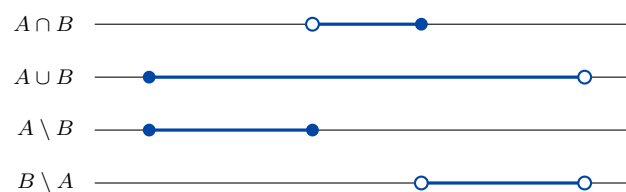
$$A \cup B = [-3; 5[.$$

Pour $A \setminus B$, on conserve les éléments de A qui ne sont pas dans B . Comme $0 \notin B$, le réel 0 reste :

$$A \setminus B = [-3; 0].$$

Enfin, $2 \in A$, donc on le retire de B :

$$B \setminus A =]2; 5[.$$



POINT FONDAMENTAL À RETENIR EN MATHÉMATIQUES Intersection, réunion et différence d'ensembles sont des opérations fondamentales. En probabilités, elles deviennent respectivement « et », « ou » et « sans » entre événements.

Exercice 11

CAL, REP, COM

Énoncé Résoudre, représenter, vérifier. Résoudre dans $\mathbb{R}$, écrire l'ensemble des solutions sous forme d'intervalle, puis vérifier graphiquement la ou les valeurs test :

a) $2x + 1 \leq 9$, tester $x = 4$;

b) $7 - 3x > 1$, tester $x = 2$;

c) $-5 \leq 2x - 1 < 7$, tester $x = -2$ et $x = 3$.

Méthode On conserve une chaîne d'équivalences. Pour une double inégalité, la même opération est effectuée sur les trois membres.

a)

$$2x + 1 \leq 9 \iff 2x \leq 8 \iff x \leq 4.$$

Donc $\mathcal{S} =]-\infty; 4]$. Le réel 4 appartient bien à l'ensemble car la borne 4 est incluse.

b)

$$7 - 3x > 1 \iff -3x > -6 \iff x < 2,$$

la dernière équivalence venant de la division par $-3 < 0$, qui inverse le sens. Ainsi $\mathcal{S} =]-\infty; 2[$. Le réel 2 n'appartient pas à l'ensemble.

c)

$$-5 \leq 2x - 1 < 7 \iff -4 \leq 2x < 8 \iff -2 \leq x < 4.$$

Donc $\mathcal{S} = [-2; 4[$. Les deux valeurs test -2 et 3 appartiennent à cet intervalle.

Erreur type / vigilance Une valeur test sert à **contrôler** une réponse, pas à démontrer qu'un intervalle entier est correct.

Exercice 12

CAL, REP

Énoncé Appartenance d'une expression. Déterminer l'ensemble des réels x tels que

$$2x + 1 \in [-3; 1[.$$

Donner la réponse sous forme d'une double inégalité et d'un intervalle, puis la représenter.

Méthode Commencer par traduire l'appartenance à l'intervalle :

$$u \in [a; b[\iff a \leq u < b.$$

Ici, l'objet u est l'expression $2x + 1$.

$$2x + 1 \in [-3; 1[\iff -3 \leq 2x + 1 < 1.$$

On soustrait 1 aux trois membres :

$$-4 \leq 2x < 0.$$

Puis on divise les trois membres par $2 > 0$, donc le sens est conservé :

$$-2 \leq x < 0.$$

Ainsi

$$\mathcal{S} = [-2; 0[.$$



POINT FONDAMENTAL À RETENIR EN MATHÉMATIQUES Quand une **expression** appartient à un intervalle, on « ouvre » d'abord l'intervalle en une double inégalité, puis on résout. Cette méthode revient souvent pour les domaines, les encadrements et les probabilités.

Exercice 13

RAI, REP

Énoncé Pour $x \in \mathbb{R}$, on considère

$$P : x > 3, \quad Q : x^2 > 9.$$

Étudier $P \Rightarrow Q$, puis sa réciproque. Pour chaque sens, donner une justification ou un contre-exemple. Représenter sur une droite les ensembles associés à P et Q .

Méthode Pour une implication, partir de l'hypothèse et chercher à obtenir la conclusion. Pour montrer qu'une implication est fausse, un seul contre-exemple suffit.

Sens direct $P \Rightarrow Q$. Si $x > 3$, alors $x > 0$ et

$$x^2 > 3^2 = 9.$$

Donc $P \Rightarrow Q$ est vraie.

Réciproque $Q \Rightarrow P$. Elle est fausse. Par exemple, $x = -4$ vérifie

$$x^2 = 16 > 9,$$

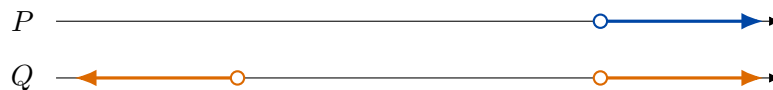
donc Q est vraie, mais $-4 > 3$ est faux : P est fausse.

Les ensembles associés sont

$$E_P =]3; +\infty[$$

et

$$E_Q =]-\infty; -3[\cup]3; +\infty[.$$



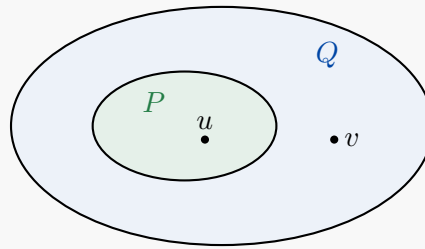
POINT FONDAMENTAL À RETENIR EN MATHÉMATIQUES Une implication peut être vraie sans que sa réciproque le soit. Pour établir une **équivalence**, il faut démontrer les deux sens.

Erreur type / vigilance Tester seulement des nombres positifs aurait pu masquer le contre-exemple négatif. Quand un carré intervient, penser aux deux signes.

Exercice 14

REP, RAI

Énoncé Lire une inclusion. Le diagramme indique que $P \subset Q$, et deux éléments u et v y sont placés.



1. Le schéma traduit-il $P \Rightarrow Q$, $Q \Rightarrow P$, ou les deux ?
2. Pour chaque phrase, dire si elle est certaine, seulement possible ou impossible :
 - (a) si $x \in P$, alors $x \in Q$;
 - (b) si $x \in Q$, alors $x \in P$;
 - (c) il existe un élément de Q qui n'appartient pas à P .

Comme $P \subset Q$, tout élément de P est un élément de Q . Le schéma traduit donc l'implication

$$x \in P \implies x \in Q.$$

La réciproque n'est pas vraie en général ; ici $v \in Q$ mais $v \notin P$.

- a) **Certaine**, par définition de $P \subset Q$.
- b) **Seulement possible** pour un élément particulier de Q : certains éléments de Q , comme u , sont dans P , mais d'autres, comme v , ne le sont pas. Si on lit la phrase comme une affirmation universelle « tout élément de Q est dans P », elle est fausse.
- c) **Certaine**, puisque v en est un exemple.

Méthode Une inclusion d'ensembles se traduit immédiatement en implication d'appartenance :

$$P \subset Q \implies (x \in P \Rightarrow x \in Q).$$

Exercice 15

REP, RAI, COM

Énoncé Dans $\mathbb{N}$, on note E l'ensemble des nombres pairs, T l'ensemble des multiples de 3, et S l'ensemble des multiples de 6.

1. Placer S dans le diagramme de E et T .
2. Formuler deux implications vraies.
3. Étudier leurs réciproques.
4. Traduire $S = E \cap T$ par une phrase.

Un multiple de 6 est à la fois divisible par 2 et par 3. Ainsi

$$S \subset E \quad \text{et} \quad S \subset T.$$

Dans un diagramme, S se place exactement dans la zone d'intersection de E et T .

Deux implications vraies sont :

$$n \in S \Rightarrow n \in E, \quad n \in S \Rightarrow n \in T.$$

Autrement dit :

- si n est multiple de 6, alors n est pair ;
- si n est multiple de 6, alors n est multiple de 3.

Les réciproques sont fausses :

$$2 \in E \quad \text{mais} \quad 2 \notin S,$$

et

$$3 \in T \quad \text{mais} \quad 3 \notin S.$$

Enfin,

$$S = E \cap T$$

signifie : **les multiples de 6 sont exactement les entiers naturels qui sont à la fois pairs et multiples de 3.**

POINT FONDAMENTAL À RETENIR EN MATHÉMATIQUES Une égalité d'ensembles $S = E \cap T$ contient deux informations : tout élément de S est dans $E \cap T$, et tout élément de $E \cap T$ est dans S . C'est déjà une logique de preuve « dans les deux sens ».

Exercice 16

RAI, COM

Énoncé Affirmation générale et négation. Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie. Si elle est fausse, donner un contre-exemple lorsque cela a un sens, puis écrire sa négation en français.

1. Tout entier relatif a un carré strictement positif.
2. Il existe un réel x tel que $x^2 = 2$.
3. Pour tout réel x , si $x > 1$, alors $x^2 > 1$.
4. Il existe un réel appartenant à $[2; 3]$ et à $] - \infty; 1]$.

a) L'affirmation est **fausse**. Le contre-exemple $n = 0$ suffit :

$$0^2 = 0,$$

qui n'est pas strictement positif.

Sa négation est :

Il existe un entier relatif dont le carré n'est pas strictement positif.

b) L'affirmation est **vraie**, car $x = \sqrt{2}$ est réel et vérifie $x^2 = 2$.

Sa négation est :

Pour tout réel x , on a $x^2 \neq 2$.

c) L'affirmation est **vraie**. Si $x > 1$, alors $x > 0$, et la fonction carré est croissante sur $[0; +\infty[$, donc $x^2 > 1^2 = 1$.

Sa négation est :

Il existe un réel $x > 1$ tel que $x^2 \leq 1$.

d) L'affirmation est **fausse**. Si $x \in [2; 3]$, alors $x \geq 2$, tandis que $x \in] - \infty; 1]$ impose $x \leq 1$. Les deux conditions sont incompatibles.

Ici, on ne réfute pas l'existence par un « contre-exemple » isolé : on démontre qu'aucun réel ne peut convenir.

La négation est :

Aucun réel n'appartient à la fois à $[2; 3]$ et à $] - \infty; 1]$.

POINT FONDAMENTAL À RETENIR EN MATHÉMATIQUES Règles de négation à connaître :

$$\neg(\text{« pour tout } x, P(x) \text{ »}) = \text{« il existe } x \text{ tel que } \neg P(x) \text{ »},$$

et

$$\neg(\text{« il existe } x \text{ tel que } P(x) \text{ »}) = \text{« pour tout } x, \neg P(x) \text{ »}.$$

Erreur type / vigilance Pour réfuter une affirmation universelle, un contre-exemple suffit. Pour réfuter une affirmation existentielle, un simple exemple ne suffit pas : il faut montrer qu'aucun objet ne convient.

C — Entraînement approfondi

Exercice 17

MOD, REP, CAL

Énoncé Dans une classe de 32 élèves, 18 pratiquent le théâtre, 15 la musique et 7 les deux.

1. Compléter le diagramme.
2. Combien ne pratiquent aucune de ces activités ?
3. Écrire avec les opérations ensemblistes l'ensemble des élèves pratiquant au moins une activité, puis une seule.

Les 7 élèves de l'intersection ont déjà été comptés dans les 18 du théâtre et dans les 15 de la musique.

Théâtre seulement :

$$18 - 7 = 11.$$

Musique seulement :

$$15 - 7 = 8.$$

Au moins une activité :

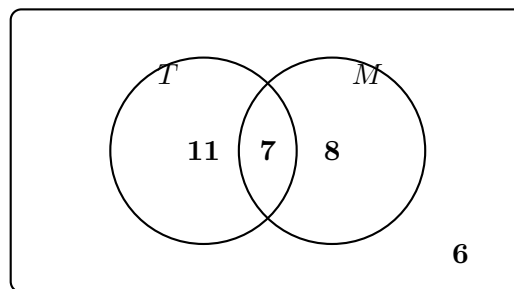
$$11 + 7 + 8 = 26,$$

ou directement

$$18 + 15 - 7 = 26.$$

Aucune activité :

$$32 - 26 = 6.$$



L'ensemble des élèves pratiquant au moins une activité est

$$\boxed{T \cup M}.$$

Ceux qui pratiquent une seule activité forment

$$\boxed{(T \cap \overline{M}) \cup (M \cap \overline{T})}$$

ou, de façon équivalente,

$$\boxed{(T \cup M) \setminus (T \cap M)}.$$

Méthode Dans un diagramme à deux ensembles, commencer par la zone d'intersection, puis compléter les zones « seulement », et terminer par l'extérieur.

Erreur type / vigilance Ne pas calculer $18 + 15 = 33$ comme nombre d'élèves différents : les 7 élèves pratiquant les deux activités seraient comptés deux fois.

Exercice 18

MOD, RAI

Énoncé Un parc autorise l'accès à une attraction si la personne mesure au moins 1,40 m **et** a au moins 12 ans, **ou** si elle est accompagnée par un adulte.

1. Traduire la règle par une formule logique.
2. Tester quatre profils de votre choix, dont un cas limite.
3. La phrase « être accompagné suffit » est-elle vraie ? Sa réciproque ?

Posons :

$H : h \geq 1,40$, $A : a \geq 12$, $C : \text{la personne est accompagnée.}$

La condition d'accès est

$$(H \text{ et } A) \text{ ou } C.$$

Exemples de profils :

Taille	Âge	Accompagné ?	Accès ?
1,40 m	12 ans	non	oui : les deux conditions limites sont atteintes.
1,50 m	10 ans	non	non : l'âge manque.
1,30 m	15 ans	oui	oui : l'accompagnement suffit.
1,60 m	16 ans	non	oui : taille et âge suffisent.

« Être accompagné suffit » est vraie :

$$C \Rightarrow \text{accès.}$$

Sa réciproque est fausse : une personne de 1,60 m et 16 ans peut accéder sans être accompagnée.

POINT FONDAMENTAL À RETENIR EN MATHÉMATIQUES Traduire « et » par une intersection de conditions et « ou » par une réunion de possibilités est une compétence fondamentale de modélisation logique.

Exercice 19

MOD, REP, RAI

Énoncé Deux capteurs mesurent correctement une température t :

$$A = [-5; 35], \quad B = [0; 40].$$

Une alarme se déclenche pour $t \notin]2; 32[$.

1. Déterminer la zone où les deux capteurs sont fiables.
2. Dans cette zone, pour quelles températures l'alarme sonne-t-elle ?
3. Représenter le résultat final.

La zone où les deux capteurs sont fiables est leur intersection :

$$A \cap B = [0; 35].$$

La condition d'alarme

$$t \notin]2; 32[$$

signifie

$$t \leq 2 \quad \text{ou} \quad t \geq 32.$$

On doit en plus rester dans $[0; 35]$. Ainsi :

$$[0; 35] \cap (]-\infty; 2] \cup [32; +\infty[) = [0; 2] \cup [32; 35].$$

**Conclusion.** Dans la zone où les deux capteurs sont fiables, l'alarme sonne pour $t \in [0; 2] \cup [32; 35]$.

Exercice 20

RAI, COM

Énoncé Clinique des erreurs. Pour chaque copie, nommer précisément l'erreur, corriger la rédaction et proposer une vérification.

Alice $x^2 = 9 \iff x = 3.$

Bilal $-2x < 6 \iff x < -3.$

Chloé $2 \in A, \text{ donc } A \in \mathbb{N}.$

Diego 4^2 est pair, donc le carré de tout entier est pair.

Émile $2 \in A \text{ et } 2 \in B, \text{ donc } A \subset B.$

Alice. Elle oublie la solution négative.

$$x^2 = 9 \iff x = 3 \text{ ou } x = -3.$$

Vérification : $(-3)^2 = 9$. Son équivalence initiale ne pouvait donc pas être correcte.

Bilal. Il divise par -2 sans inverser le sens de l'inégalité :

$$-2x < 6 \iff x > -3.$$

Vérification : $x = 0$ satisfait $-2x < 6$ et $0 > -3$, tandis que $x = -4$ ne satisfait pas l'inégalité initiale.

Chloé. Elle confond la nature des objets. 2 est un élément de A , mais cela ne permet pas de dire que l'ensemble A est un entier naturel. La seule information acquise est $2 \in A$. Si l'on voulait conclure $A \subset \mathbb{N}$, il faudrait savoir que **tous** les éléments de A sont naturels.

Diego. Il généralise à partir d'un seul exemple. Or $1^2 = 1$ est impair. L'exemple $4^2 = 16$ illustre seulement un cas ; il ne prouve pas une affirmation portant sur tous les entiers.

Émile. Un élément commun ne prouve pas une inclusion. De $2 \in A$ et $2 \in B$, on peut seulement conclure $2 \in A \cap B$. Par exemple, avec $A = \{2; 3\}$ et $B = \{2; 4\}$, les deux ensembles ont l'élément 2 en commun, mais $A \not\subset B$.

POINT FONDAMENTAL À RETENIR EN MATHÉMATIQUES Trois contrôles universels avant de valider une ligne :

1. ai-je conservé **toutes** les solutions ?
2. ai-je respecté la **nature** des objets et des symboles ?
3. suis-je en train de prouver un cas particulier ou une affirmation **générale** ?

Exercice 21

RAI, COM

Énoncé Trois copies pour une même inéquation. Trois élèves résolvent $2x - 3 < 5$. Pour chaque copie, dire ce qu'elle prouve, ce qu'elle ne prouve pas, puis rédiger la réponse complète attendue :

Ana $2x < 8$, donc $x < 4$.

Badis $\mathcal{S} =] - \infty; 4[$.

Carmen pour $x = 3$, on a bien $2x - 3 < 5$.

Ana. Son calcul va dans la bonne direction, mais la rédaction par « donc » ne met pas en évidence que les transformations sont réversibles. Elle montre au moins que toute solution de l'inéquation initiale doit vérifier $x < 4$, mais elle ne rédige pas explicitement le retour.

Badis. Il donne le bon ensemble de solutions, mais sans justification : on ne sait pas comment il l'a obtenu.

Carmen. Elle montre seulement que $x = 3$ est **une** solution. Un exemple ne détermine pas toutes les solutions.

La rédaction complète attendue est :

$$2x - 3 < 5 \iff 2x < 8 \quad (\text{on ajoute 3 aux deux membres})$$

puis

$$2x < 8 \iff x < 4 \quad (\text{on divise par } 2 > 0).$$

Ainsi

$$\mathcal{S} =] - \infty; 4[.$$

POINT FONDAMENTAL À RETENIR EN MATHÉMATIQUES Dans une résolution, une chaîne d'**équivalences** garantit que l'ensemble des solutions est conservé à chaque étape. C'est une exigence de rédaction qui devient essentielle au lycée.

Exercice 22

REP, RAI

Énoncé Dominos de traduction. Associer chaque inégalité à son intervalle et à l'information sur ses bornes :

$$x \leq 2, \quad -1 < x < 3, \quad x \geq -2,$$

avec

$$]-\infty; 2], \quad]-1; 3[, \quad [-2; +\infty[,$$

et les indications « borne 2 incluse », « deux bornes exclues », « borne -2 incluse ». Construire ensuite un quatrième domino correspondant à $x < -4$.

Les trois triplets sont :

$$x \leq 2 \quad \leftrightarrow \quad]-\infty; 2] \quad \leftrightarrow \quad \text{borne 2 incluse},$$

$$-1 < x < 3 \quad \leftrightarrow \quad]-1; 3[\quad \leftrightarrow \quad \text{deux bornes exclues},$$

$$x \geq -2 \quad \leftrightarrow \quad [-2; +\infty[\quad \leftrightarrow \quad \text{borne -2 incluse}.$$

Pour $x < -4$, on obtient

$$x < -4 \quad \leftrightarrow \quad]-\infty; -4[\quad \leftrightarrow \quad \text{borne -4 exclue}.$$

Erreur type / vigilance Le symbole $<$ donne une borne exclue ; le symbole $\leq$ donne une borne incluse.

Exercice 23

REP, RAI, COM

Énoncé On définit

$$E = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x < 4 \text{ et } x \neq 1\}.$$

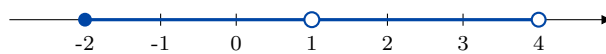
1. Écrire E comme réunion d'intervalles.
2. Le représenter.
3. Décider si les inclusions suivantes sont vraies :

$$[-2; 1[\subset E, \quad E \subset [-2; 4], \quad [1; 4[\subset E.$$

4. Corriger toute inclusion fausse.

La condition $-2 \leq x < 4$ donne l'intervalle $[-2; 4[$. On doit ensuite enlever le réel 1. L'ensemble se coupe donc en deux morceaux :

$$E = [-2; 1[\cup]1; 4[.$$



$$[-2; 1[\subset E$$

est vraie.

$$E \subset [-2; 4]$$

est vraie : tout élément de E est compris entre -2 et 4 , même si 4 n'appartient pas à E .

En revanche,

$$[1; 4[\subset E$$

est fausse, car $1 \in [1; 4[$ mais $1 \notin E$. Une correction naturelle est

$$]1; 4[\subset E.$$

Méthode Pour réfuter une inclusion $A \subset B$, il suffit de trouver un élément de A qui n'appartient pas à B .

D — Synthèse, problèmes et prises d'initiative

Exercice 24

CH, RAI, COM

Énoncé Un entier n appartient à $[-5; 5]$. On considère

$$P : n < 0, \quad Q : n^2 \leq 4, \quad R : n \text{ est pair}, \quad S : n \in]-1; 4[.$$

On sait que $P \Rightarrow Q$ est fausse et qu'exactement deux des quatre assertions P, Q, R, S sont vraies. Déterminer n et rédiger une justification exhaustive.

Méthode La première information est très forte : une implication est fausse **uniquement** quand son hypothèse est vraie et sa conclusion fausse.

Comme $P \Rightarrow Q$ est fausse, on a simultanément :

$$P \text{ vraie} \quad \text{et} \quad Q \text{ fausse.}$$

Donc

$$n < 0$$

et

$$n^2 > 4.$$

Avec $n \in \mathbb{Z} \cap [-5; 5]$, il reste seulement

$$n \in \{-5, -4, -3\}.$$

On teste ces trois valeurs :

n	P	Q	R	S	nombre de vraies
-5	V	F	F	F	1
-4	V	F	V	F	2
-3	V	F	F	F	1

La seule valeur pour laquelle exactement deux assertions sont vraies est donc

$$\boxed{n = -4}.$$

POINT FONDAMENTAL À RETENIR EN MATHÉMATIQUES Le cas de fausseté d'une implication est un outil de raisonnement puissant :

$$P \Rightarrow Q \text{ fausse} \iff P \text{ vraie et } Q \text{ fausse.}$$

Exercice 25

REP, RAI

Énoncé Pour $x \in \mathbb{R}$, on note

$$A : x > 2, \quad B : x^2 > 4, \quad C : x + 1 > 3, \quad D : x \in]2; +\infty[.$$

Le réseau propose les flèches

$$A \rightarrow B, \quad B \rightarrow A, \quad A \rightarrow C, \quad C \rightarrow A, \quad C \rightarrow D, \quad D \rightarrow C, \quad D \rightarrow B, \quad B \rightarrow D.$$

1. Déterminer les flèches qui correspondent à des implications vraies pour tout x .
2. Regrouper les assertions équivalentes.
3. Pour chaque flèche fausse, donner un contre-exemple.

Commençons par simplifier les assertions :

$$C : x + 1 > 3 \iff x > 2,$$

donc C est exactement la même condition que A . De même,

$$D : x \in]2; +\infty[$$

signifie exactement $x > 2$. Ainsi

$$\boxed{A \iff C \iff D}.$$

Pour B ,

$$x^2 > 4 \iff x < -2 \text{ ou } x > 2.$$

Donc B contient tous les cas de A, C, D , mais aussi les réels strictement inférieurs à -2 .

Les implications vraies sont donc :

$$\boxed{A \Rightarrow B, \quad A \Rightarrow C, \quad C \Rightarrow A, \quad C \Rightarrow D, \quad D \Rightarrow C, \quad D \Rightarrow B.}$$

Les flèches fausses sont

$$B \Rightarrow A \quad \text{et} \quad B \Rightarrow D.$$

Le même contre-exemple convient aux deux : $x = -3$. En effet,

$$(-3)^2 = 9 > 4,$$

donc B est vraie, mais $-3 > 2$ est faux, donc A et D sont fausses.

POINT FONDAMENTAL À RETENIR EN MATHÉMATIQUES Avant d'étudier un réseau logique, **traduire chaque assertion en ensemble de solutions**. Une implication $P \Rightarrow Q$ correspond alors à une inclusion $E_P \subset E_Q$.

Exercice 26

MOD, RAI, COM

Énoncé Dans une serre, un volet d'aération est ouvert lorsque

$$t \in [15; 28],$$

et un brumisateur fonctionne lorsque

$$t \in]24; 35[.$$

Un technicien reçoit une alerte lorsque **exactement un** des deux dispositifs est actif.

1. Déterminer les températures pour lesquelles les deux dispositifs sont actifs simultanément.
2. En déduire l'ensemble des températures d'alerte sous forme de réunion d'intervalles.
3. Représenter cet ensemble.

Notons

$$V = [15; 28] \quad \text{et} \quad B =]24; 35[.$$

Les deux dispositifs sont simultanément actifs sur l'intersection :

$$V \cap B =]24; 28].$$

Le réel 24 est exclu car le brumisateur ne fonctionne pas à 24°C. Le réel 28 est inclus car $28 \in V$ et $28 \in B$.

« Exactement un » signifie : dans V sans être dans B , ou dans B sans être dans V . Ainsi :

$$V \setminus B = [15; 24]$$

et

$$B \setminus V =]28; 35[.$$

Donc l'ensemble d'alerte est

$$\boxed{[15; 24] \cup]28; 35[}.$$



Erreur type / vigilance « Exactement un » ne signifie pas « au moins un ». La zone où les deux dispositifs sont actifs doit être retirée.

Exercice 27

CH, MOD, REP

Énoncé Une zone de réglage doit être un **intervalle fermé** I , inclus dans $A \cup B$ et disjoint de C , avec

$$A = [-5; 2], \quad B = [1; 6], \quad C =] - 1; 3[.$$

Déterminer l'intervalle I de longueur maximale et justifier qu'aucun autre intervalle admissible n'est plus long.

D'abord,

$$A \cup B = [-5; 6],$$

car les deux intervalles se recouvrent sur $[1; 2]$.

L'intervalle I doit être disjoint de

$$C =] - 1; 3[.$$

Les bornes -1 et 3 ne sont **pas** dans C , elles peuvent donc appartenir à I .

À l'intérieur de $[-5; 6]$, la partie autorisée est

$$[-5; -1] \cup [3; 6].$$

Comme I doit lui-même être un intervalle, il ne peut pas prendre des points dans les deux morceaux : il traverserait alors C .

Les deux candidats maximaux sont donc

$$[-5; -1] \quad \text{de longueur } (-1) - (-5) = 4$$

et

$$[3; 6] \quad \text{de longueur } 6 - 3 = 3.$$

Par conséquent,

$$\boxed{I = [-5; -1]}.$$

Méthode Dans un problème d'optimisation sur des ensembles :

1. déterminer d'abord la zone admissible ;
2. utiliser ensuite la contrainte de forme (ici : « être un intervalle ») ;
3. comparer enfin les grandeurs à maximiser.

Erreur type / vigilance Ne pas exclure automatiquement -1 et 3 : l'intervalle $C =] - 1; 3[$ est ouvert à ses deux bornes.

Exercice 28

RAI, COM

Énoncé Soit $n \in \mathbb{Z}$. On veut démontrer :

« si n^2 est pair, alors n est pair ».

1. Écrire la réciproque.
2. La contraposée est : « si n est impair, alors n^2 est impair ». Expliquer pourquoi elle a la même valeur de vérité que l'implication initiale.
3. En posant $n = 2k + 1$, démontrer la contraposée.
4. Conclure.

1. Réciproque. La réciproque est :

si n est pair, alors n^2 est pair.

2. Contraposée. L'implication initiale est

$$P \Rightarrow Q$$

avec P : « n^2 est pair » et Q : « n est pair ». Sa contraposée est

$$\neg Q \Rightarrow \neg P,$$

c'est-à-dire :

« si n est impair, alors n^2 est impair ».

Une implication et sa contraposée ont toujours la même valeur de vérité.

3. Démonstration. Supposons n impair. Il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$n = 2k + 1.$$

Alors

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1.$$

Comme $2k^2 + 2k \in \mathbb{Z}$, cette écriture est de la forme $2m + 1$ avec $m \in \mathbb{Z}$. Ainsi n^2 est impair.

La contraposée est démontrée ; elle a la même valeur de vérité que l'implication initiale. Donc

n^2 pair $\Rightarrow$ n pair.

POINT FONDAMENTAL À RETENIR EN MATHÉMATIQUES La **contraposée** est une méthode fondamentale de démonstration : pour prouver $P \Rightarrow Q$, on peut prouver à la place

$$\neg Q \Rightarrow \neg P.$$

Ce n'est pas la réciproque.

Erreur type / vigilance Ne pas confondre :

$$\text{réciproque : } Q \Rightarrow P, \quad \text{contraposée : } \neg Q \Rightarrow \neg P.$$

Seule la contraposée est logiquement équivalente à l'implication initiale.

Exercice 29

CH, REP, RAI

Énoncé Dans un univers U , construire trois ensembles A, B, C vérifiant simultanément

$$A \subset B, \quad A \cap C = \emptyset, \quad B \cap C \neq \emptyset, \quad C \not\subset B.$$

1. Dessiner un diagramme possible.
2. Placer au moins six éléments nommés.
3. Écrire quatre assertions d'appartenance vraies et deux fausses.
4. Expliquer pourquoi toutes les contraintes sont satisfaites.

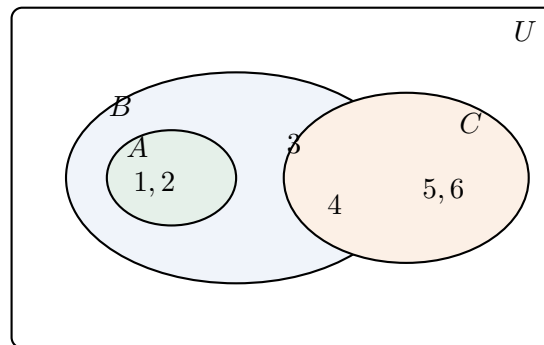
Il existe de nombreuses réponses. En voici une construction complète.

Prenons

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$

et définissons

$$A = \{1, 2\}, \quad B = \{1, 2, 3, 4\}, \quad C = \{4, 5, 6\}.$$



Quatre assertions vraies possibles :

$$1 \in A, \quad 3 \in B, \quad 4 \in B, \quad 5 \in C.$$

Deux assertions fausses possibles :

$$3 \in A, \quad 6 \in B.$$

Vérifions les contraintes :

- $A \subset B$, car 1 et 2, les éléments de A , sont dans B .
- $A \cap C = \emptyset$, car $A = \{1, 2\}$ et $C = \{4, 5, 6\}$ n'ont aucun élément commun.
- $B \cap C = \{4\} \neq \emptyset$.
- $C \not\subset B$, car $5 \in C$ mais $5 \notin B$ (de même pour 6).

Méthode Pour construire plusieurs ensembles sous contraintes, satisfaire d'abord les inclusions, puis réserver explicitement un élément témoin pour chaque contrainte de non-inclusion ou d'intersection non vide.

Exercice 30

CH, RAI, REP, COM

Énoncé Atelier final — certifier une équivalence. On veut établir, pour tout réel x ,

$$x \in [-2; 2] \iff x^2 \leq 4.$$

1. Comparer les deux descriptions en les représentant.
2. Sens direct : à partir de $x \in [-2; 2]$, introduire $|x|$, puis justifier

$$|x| \leq 2 \Rightarrow x^2 \leq 4.$$

3. Sens réciproque : raisonner par contraposée et montrer

$$x \notin [-2; 2] \Rightarrow x^2 > 4,$$

en traitant séparément $x < -2$ et $x > 2$.

4. Organiser une preuve avec les étapes :

$$x \in [-2; 2] \iff -2 \leq x \leq 2 \iff |x| \leq 2,$$

« comme $0 \leq |x| \leq 2$, on peut élever au carré »,

$$x \notin [-2; 2] \iff x < -2 \text{ ou } x > 2,$$

et « dans chacun des deux cas, $|x| > 2$, donc $x^2 > 4$ ».

5. Contrôle logique :
 - (a) expliquer pourquoi tester seulement $x = 0, 1, 2$ ne démontre pas le résultat pour tous les réels ;
 - (b) donner un exemple montrant qu'un seul sens ne suffit pas à établir une équivalence ;
 - (c) rédiger une conclusion contenant « pour tout réel » et « équivalent ».

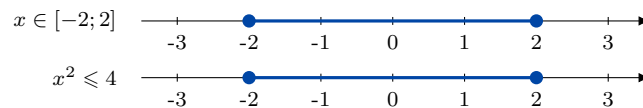
1. Comparaison graphique. Les deux descriptions donnent le même intervalle :

$$x \in [-2; 2]$$

et

$$x^2 \leq 4 \iff |x| \leq 2,$$

ce qui correspond aussi à $[-2; 2]$.



2. Sens direct. Supposons

$$x \in [-2; 2].$$

Alors

$$-2 \leq x \leq 2,$$

ce qui est équivalent à

$$|x| \leq 2.$$

Comme $0 \leq |x| \leq 2$, les deux membres sont non négatifs. On peut donc élever au carré en conservant l'ordre :

$$|x|^2 \leq 2^2.$$

Or $|x|^2 = x^2$. Ainsi

$$x^2 \leq 4.$$

Nous avons démontré

$$x \in [-2; 2] \Rightarrow x^2 \leq 4.$$

3. Sens réciproque par contraposée. On veut montrer

$$x^2 \leq 4 \Rightarrow x \in [-2; 2].$$

Sa contraposée est

$$x \notin [-2; 2] \Rightarrow x^2 > 4.$$

Supposons donc $x \notin [-2; 2]$. Alors

$$x < -2 \quad \text{ou} \quad x > 2.$$

Si $x < -2$, alors $-x > 2$, donc $|x| > 2$. Si $x > 2$, alors directement $|x| > 2$.

Dans les deux cas, $|x| > 2$, et comme les deux membres sont positifs,

$$|x|^2 > 4.$$

Ainsi $x^2 > 4$. La contraposée est démontrée, donc

$$x^2 \leq 4 \Rightarrow x \in [-2; 2].$$

4. Organisation logique. Le sens direct utilise d'abord

$$x \in [-2; 2] \iff -2 \leq x \leq 2 \iff |x| \leq 2,$$

puis l'élévation au carré sur des quantités non négatives. Le sens réciproque est obtenu en démontrant sa contraposée à partir de

$$x \notin [-2; 2] \iff x < -2 \text{ ou } x > 2.$$

5.a) Tester 0, 1 et 2 ne prouve rien pour **tous** les réels : ces tests vérifient seulement trois cas particuliers parmi une infinité de valeurs.

5.b) Par exemple,

$$x > 3 \Rightarrow x^2 > 9$$

est vraie, mais la réciproque est fausse puisque $x = -4$ vérifie $x^2 > 9$ sans vérifier $x > 3$. Un seul sens ne donne donc pas une équivalence.

5.c) Conclusion. Nous avons démontré les deux implications. Ainsi :

pour tout réel x , $x \in [-2; 2]$ est équivalent à $x^2 \leq 4$.

POINT FONDAMENTAL À RETENIR EN MATHÉMATIQUES Pour démontrer $P \iff Q$, il faut établir

$$P \Rightarrow Q \quad \text{et} \quad Q \Rightarrow P.$$

Le second sens peut être prouvé directement ou par contraposée. Cette structure est fondamentale dans les démonstrations.

Erreur type / vigilance On ne peut pas élever n'importe quelle inégalité au carré sans précaution. Ici, on peut le faire parce que $0 \leq |x| \leq 2$: les deux membres sont non négatifs.

Synthèse des méthodes à retenir

POINT FONDAMENTAL À RETENIR EN MATHÉMATIQUES

1. **Calcul** : respecter les priorités, contrôler les signes, maîtriser la distributivité et les fractions.
2. **Équations et inéquations** : écrire des transformations équivalentes et expliciter l'opération faite sur les deux membres.
3. **Ensembles** : distinguer $x \in A$ et $A \subset B$; lire précisément les bornes d'un intervalle.
4. **Implication** : pour réfuter $P \Rightarrow Q$, chercher P vraie et Q fausse.
5. **Réciproque** : elle n'est jamais automatiquement vraie.
6. **Quantificateurs** : la négation de « pour tout » commence par « il existe », et inversement.
7. **Contraposée** : $P \Rightarrow Q$ est équivalente à $\neg Q \Rightarrow \neg P$.
8. **Équivalence** : toujours démontrer les deux sens.

Pour travailler seul. Quand une réponse du corrigé paraît évidente, fermer le document et essayer de reconstruire la justification de mémoire. L'objectif n'est pas seulement de connaître la bonne réponse : il faut savoir reconnaître la méthode, expliquer pourquoi elle est valide et repérer l'erreur qu'elle évite.