

N24 — Variables aléatoires, espérance

Automatismes

Première spécialité — Beamer 16 :9

CONSIGNE

Lire une loi de probabilité et calculer ses premiers indicateurs.

- 1 Une variable aléatoire X prend les valeurs 0, 1, 2 avec probabilités 0,2, 0,5, 0,3. Calculer $P(X \geq 1)$.
- 2 Calculer $E(X)$.
- 3 Calculer $E(X^2)$.
- 4 Calculer $V(X)$.
- 5 Donner une valeur approchée de $\sigma(X)$ au centième.
- 6 Interpréter $E(X)$ en une phrase courte.

CONSEILS

- Vérifier que les probabilités totalisent 1.
- $E(X) = \sum x_i p_i$.
- $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$.

VIGILANCE

- Ne pas confondre $E(X^2)$ et $E(X)^2$.
- L'espérance n'est pas forcément une valeur prise par X .

- 1 $P(X \geq 1) = 0,5 + 0,3 = 0,8$.
- 2 $E(X) = 0 \times 0,2 + 1 \times 0,5 + 2 \times 0,3 = 1,1$.
- 3 $E(X^2) = 0 + 1^2 \times 0,5 + 2^2 \times 0,3 = 1,7$.
- 4 $V(X) = 1,7 - 1,1^2 = 0,49$.
- 5 $\sigma(X) = \sqrt{0,49} = 0,70$.
- 6 Sur un grand nombre d'expériences, la moyenne attendue est 1,1.

MÉTHODE

- Construire deux lignes : valeurs puis probabilités.
- Calculer séparément $E(X)$, $E(X^2)$, puis $V(X)$.

VIGILANCE

- La variance mesure une dispersion, elle est positive.

CONSIGNE

Compléter une loi puis calculer espérance et variance.

- 1 X prend les valeurs $-1, 0, 3$ avec probabilités $0,25, p, 0,35$. Calculer p .
- 2 Calculer $P(X > 0)$.
- 3 Calculer $E(X)$.
- 4 Calculer $E(X^2)$.
- 5 Calculer $V(X)$.
- 6 Donner une valeur approchée de l'écart type au centième.

CONSEILS

- La somme des probabilités vaut 1.
- Les valeurs négatives comptent dans l'espérance.
- Les carrés sont toujours positifs dans $E(X^2)$.

VIGILANCE

- Ne pas supprimer le signe moins de la valeur -1 .
- Ne pas arrondir trop tôt.

- 1 $p = 1 - 0,25 - 0,35 = 0,40$.
- 2 $P(X > 0) = P(X = 3) = 0,35$.
- 3 $E(X) = -1 \times 0,25 + 3 \times 0,35 = 0,80$.
- 4 $E(X^2) = 1 \times 0,25 + 9 \times 0,35 = 3,40$.
- 5 $V(X) = 3,40 - 0,80^2 = 2,76$.
- 6 $\sigma(X) = \sqrt{2,76} \approx 1,66$.

MÉTHODE

- Compléter la loi avant tout calcul.
- Appliquer $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$.

VIGILANCE

- Une espérance peut être positive même si une valeur est négative.

CONSIGNE

Modéliser rapidement un gain algébrique par une variable aléatoire.

- 1 Un jeu coûte 2 euros. Avec probabilité 0,2, on gagne 10 euros, sinon on ne gagne rien. Donner les valeurs du gain algébrique G .
- 2 Donner la loi de G .
- 3 Calculer $E(G)$.
- 4 Le jeu est-il favorable au joueur ?
- 5 Calculer $P(G > 0)$.
- 6 On double la mise gagnante : le gain brut devient 20 euros. Donner la nouvelle espérance.

CONSEILS

- Gain algébrique = gain reçu moins coût payé.
- Un jeu favorable a une espérance positive.
- Garder le signe du gain négatif.

VIGILANCE

- Ne pas confondre gain brut et gain algébrique.
- Une probabilité faible peut être compensée par un gain élevé.

- 1 $G = 8$ en cas de gain brut 10, et $G = -2$ sinon : 8 et -2.
- 2 $P(G = 8) = 0,2$ et $P(G = -2) = 0,8$.
- 3 $E(G) = 8 \times 0,2 + (-2) \times 0,8 =$ 0.
- 4 L'espérance est nulle : jeu équilibré.
- 5 $P(G > 0) = P(G = 8) =$ 0,2.
- 6 Nouvelle espérance : $18 \times 0,2 + (-2) \times 0,8 =$ 2.

MÉTHODE

- Identifier d'abord les valeurs possibles du gain algébrique.
- Calculer l'espérance pour juger le jeu.

VIGILANCE

- Un jeu peut être souvent perdant mais favorable en moyenne.

CONSIGNE

Choisir rapidement la bonne réponse. Une seule réponse correcte.

- 1 Une loi de probabilité doit avoir une somme de probabilités égale à **A.0** **B.1**
C.100 **D. $E(X)$**
- 2 Si X vaut 2 avec probabilité 0,3 et 5 avec probabilité 0,7, $E(X) =$ **A.3,5**
B.4,1 **C.7** **D.0,21**
- 3 La formule de la variance est **A. $E(X^2) - E(X)^2$** **B. $E(X)^2 - E(X^2)$**
C. $E(X^2)$ **D. $\sqrt{E(X)}$**
- 4 Un jeu est favorable au joueur si **A. $E(G) < 0$** **B. $E(G) = 0$** **C. $E(G) > 0$**
D. $P(G > 0) = 1$
- 5 L'écart type est **A.la variance** **B.la racine carrée de la variance**
C.l'espérance **D.une probabilité**
- 6 Si $V(X) = 0$, alors X est **A.toujours dispersée** **B.constante presque sûrement**
C.négative **D.impossible**

CONSEILS

- ▶ Un QCM de variables aléatoires teste surtout les formules.
- ▶ Identifier la grandeur : probabilité, espérance ou dispersion.
- ▶ Contrôler l'unité : variance et écart type ne sont pas identiques.

VIGILANCE

- ▶ L'espérance peut ne pas être une valeur possible.
- ▶ La variance ne peut pas être négative.

1 B.

2 B, car $2 \times 0,3 + 5 \times 0,7 = 4,1$.

3 A.

4 C.

5 B.

6 B.

MÉTHODE

- Mémoriser la chaîne : loi
→ espérance → variance
→ écart type.
- Écarter toute variance négative.

VIGILANCE

- Une espérance ne dit pas toute la dispersion.