

Développer et utiliser les identités vectorielles.

- 1 Développer $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2$.
- 2 Développer $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2$.
- 3 Si $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 5$, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 4$, calculer $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2$.
- 4 Avec les mêmes données, calculer $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2$.
- 5 Si $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = 50$, $\|\vec{u}\| = 4$, $\|\vec{v}\| = 5$, calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$.
- 6 Simplifier $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})$.

CONSEILS

- Une norme au carré est un produit scalaire avec soi-même.
- Développer comme avec $(a + b)^2$, mais avec des vecteurs.
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$.

VIGILANCE

- Ne pas oublier le terme $2\vec{u} \cdot \vec{v}$.
- Le signe change dans $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2$.

CORRECTION — N18

Identités avec le produit scalaire

Série A
Calculatrice interdite

- 1 $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$.
- 2 $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$.
- 3 $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = 9 + 2 \times 4 + 25 = 42$.
- 4 $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 9 - 2 \times 4 + 25 = 26$.
- 5 $50 = 16 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + 25$, donc $2\vec{u} \cdot \vec{v} = 9$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{9}{2}$.
- 6 $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$.

MÉTHODE

Transformer une norme au carré en produit scalaire permet de développer proprement.

VIGILANCE

Les identités vectorielles ressemblent aux identités remarquables, mais le produit est le produit scalaire.

Relier longueurs et angles dans un triangle quelconque.

- 1 Dans ABC , $AB = 5$, $AC = 7$ et $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Calculer BC^2 .
- 2 En déduire BC .
- 3 Dans ABC , $AB = 5$, $AC = 6$, $BC = 7$. Calculer $\cos(\widehat{BAC})$.
- 4 Dans ABC , $AB = 4$, $AC = 3$, $BC = 5$. Que vaut $\widehat{BAC}$?
- 5 Si $AB^2 + AC^2 - BC^2 < 0$, l'angle $\widehat{BAC}$ est-il aigu ou obtus ?
- 6 Écrire la formule d'Al-Kashi pour BC^2 .

CONSEILS

- Côté opposé à l'angle : BC est opposé à $\widehat{BAC}$.
- $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$.
- Pour trouver un angle, isoler le cosinus.

VIGILANCE

- Ne pas confondre le côté opposé et les côtés adjacents.
- Al-Kashi généralise Pythagore.

CORRECTION — N18

Théorème d'Al-Kashi

Série B
Calculatrice interdite

- 1 $BC^2 = 5^2 + 7^2 - 2 \times 5 \times 7 \times \frac{1}{2} = 25 + 49 - 35 = 39.$
- 2 $BC = \sqrt{39}.$
- 3 $7^2 = 5^2 + 6^2 - 2 \times 5 \times 6 \cos A$, donc $\cos A = \frac{25 + 36 - 49}{60} = \frac{1}{5}.$
- 4 $5^2 = 4^2 + 3^2$, donc le triangle est rectangle en A, ainsi $\widehat{BAC} = 90^\circ.$
- 5 $\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \times AC} < 0$, donc l'angle est obtus.
- 6 $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \cos(\widehat{BAC}).$

MÉTHODE

Identifier le côté opposé à l'angle avant d'écrire la formule évite presque toutes les erreurs.

VIGILANCE

Le cosinus peut être négatif : cela indique un angle obtus.

Reconnaître un lieu à partir d'une condition de produit scalaire.

- 1 $A(0; 0)$, $B(4; 0)$, $M(x; y)$. Donner $\overrightarrow{MA}$.
- 2 Donner $\overrightarrow{MB}$.
- 3 Écrire $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ en fonction de x et y .
- 4 Transformer $x^2 + y^2 - 4x = 0$ sous forme canonique.
- 5 Quel est le lieu des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$?
- 6 Écrire l'équation du lieu $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = 8$.

CONSEILS

- ▶ $\overrightarrow{MA} = A - M$ et $\overrightarrow{MB} = B - M$.
- ▶ $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ traduit un angle droit.
- ▶ Compléter le carré pour reconnaître un cercle.

VIGILANCE

- ▶ Attention à l'ordre des vecteurs.
- ▶ Une équation peut représenter une droite ou un cercle.

- 1 $\overrightarrow{MA}(0 - x; 0 - y) = (-x; -y)$.
- 2 $\overrightarrow{MB}(4 - x; -y) = (4 - x; -y)$.
- 3 $(-x)(4 - x) + (-y)(-y) = 0$, donc $x^2 + y^2 - 4x = 0$.
- 4 $x^2 - 4x + y^2 = 0$, donc $(x - 2)^2 + y^2 = 4$.
- 5 C'est le cercle de diamètre $[AB]$, de centre $(2; 0)$ et de rayon 2.
- 6 $\overrightarrow{AM}(x; y)$, $\overrightarrow{AB}(4; 0)$, donc $4x = 8$, soit $x = 2$.

MÉTHODE

Un produit scalaire nul donne souvent un angle droit ; le lieu associé peut être un cercle.

VIGILANCE

L'équation $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ se lit centre $(a; b)$, rayon r .

Choisir la bonne réponse. Une seule réponse est correcte.

- 1 $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 =$ **A.** $\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$ **B.** $\|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$ **C.** $\|\vec{u}\| - \|\vec{v}\|$
- 2 Dans Al-Kashi, si l'angle est droit, on retrouve **A.** Thalès **B.** Pythagore
C. la médiane
- 3 Le lieu $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ est **A.** une droite **B.** un cercle de diamètre $[AB]$
C. une parabole
- 4 Si $\cos A < 0$, alors A est **A.** aigu **B.** droit **C.** obtus
- 5 $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) =$ **A.** $\|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$ **B.** $2\vec{u} \cdot \vec{v}$ **C.** 0

CONSEILS

- Revenir aux identités de base.
- Relier les lieux aux angles droits.
- Le signe du cosinus donne la nature de l'angle.

VIGILANCE

- Un carré de norme se développe, une norme non.
- Ne pas confondre cercle de diamètre et cercle de centre A .

- 1 C'est l'identité de la différence. Réponse **B**.
- 2 Avec un angle droit, $\cos 90^\circ = 0$. Réponse **B**.
- 3 L'angle $\widehat{AMB}$ est droit. Réponse **B**.
- 4 Un cosinus négatif correspond à un angle obtus. Réponse **C**.
- 5 Les termes croisés s'annulent. Réponse **A**.

MÉTHODE

Les QCM de géométrie se traitent mieux en identifiant la figure mentale associée.

VIGILANCE

La réponse juste doit être compatible avec les dimensions : longueur, carré de longueur ou nombre.