

Calculer rapidement des produits scalaires et reconnaître l'orthogonalité.

- 1 Soit $\vec{u}(3; 4)$ et $\vec{v}(2; -1)$. Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$.
- 2 Soit $\vec{a}(-5; 2)$ et $\vec{b}(1; 3)$. Calculer $\vec{a} \cdot \vec{b}$.
- 3 Soit $\vec{r}(6; -2)$ et $\vec{s}(1; 3)$. Les vecteurs sont-ils orthogonaux ?
- 4 Soit $\vec{m}(4; 3)$. Calculer $\vec{m} \cdot \vec{m}$.
- 5 En déduire $\|\vec{m}\|$.
- 6 Trouver x pour que $\vec{p}(2; x)$ et $\vec{q}(3; -4)$ soient orthogonaux.

CONSEILS

- ▶ En coordonnées :
 $(x; y) \cdot (x'; y') = xx' + yy'$.
- ▶ $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$.
- ▶ Orthogonalité : produit scalaire nul.

VIGILANCE

- ▶ Ne pas multiplier seulement les abscisses.
- ▶ $\|\vec{u}\|^2$ n'est pas toujours $\|\vec{u}\|$.

CORRECTION — N17

Produit scalaire en coordonnées

Série A
Calculatrice interdite

- 1 $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \times 2 + 4 \times (-1) = 2$.
- 2 $\vec{a} \cdot \vec{b} = (-5) \times 1 + 2 \times 3 = 1$.
- 3 $\vec{r} \cdot \vec{s} = 6 \times 1 + (-2) \times 3 = 0$, donc ils sont orthogonaux.
- 4 $\vec{m} \cdot \vec{m} = 4^2 + 3^2 = 25$.
- 5 $\|\vec{m}\| = \sqrt{25} = 5$.
- 6 $2 \times 3 + x \times (-4) = 0$, donc $6 - 4x = 0$, d'où $x = \frac{3}{2}$.

MÉTHODE

Calculer d'abord le produit scalaire, puis interpréter : nul, positif, négatif ou carré d'une norme.

VIGILANCE

Dans une condition d'orthogonalité, l'inconnue est dans une équation produit scalaire = 0.

Utiliser la formule $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta$.

- 1 $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 4$, $\theta = 60^\circ$. Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$.
- 2 $\|\vec{a}\| = 5$, $\|\vec{b}\| = 2$, $\theta = 90^\circ$. Calculer $\vec{a} \cdot \vec{b}$.
- 3 $\|\vec{r}\| = 2$, $\|\vec{s}\| = 3$, $\theta = 180^\circ$. Calculer $\vec{r} \cdot \vec{s}$.
- 4 Si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 6$, $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 4$, calculer $\cos \theta$.
- 5 Si $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$, l'angle est-il aigu ou obtus ?
- 6 Si $AB = 8$ et la projection de $\overrightarrow{AC}$ sur (AB) vaut 3, calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

CONSEILS

- $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, $\cos 90^\circ = 0$, $\cos 180^\circ = -1$.
- Le signe du produit scalaire renseigne sur l'angle.
- Projection : longueur orientée sur la direction donnée.

VIGILANCE

- Une projection peut être négative.
- Orthogonal ne signifie pas parallèle.

- 1 $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \times 4 \times \frac{1}{2} = 6$.
- 2 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 5 \times 2 \times 0 = 0$.
- 3 $\vec{r} \cdot \vec{s} = 2 \times 3 \times (-1) = -6$.
- 4 $\cos \theta = \frac{6}{3 \times 4} = \frac{1}{2}$.
- 5 Si $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$, alors $\cos \theta < 0$: l'angle est obtus.
- 6 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times 3 = 24$.

MÉTHODE

La formule avec le cosinus permet de passer d'une information géométrique à un calcul.

VIGILANCE

Le signe du cosinus suit le signe du produit scalaire si les deux normes sont non nulles.

Passer des points aux vecteurs, puis calculer le produit scalaire.

- 1 $A(1; 2), B(4; 3)$. Donner les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$.
- 2 $A(1; 2), C(2; -1)$. Donner les coordonnées de $\overrightarrow{AC}$.
- 3 Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
- 4 Que peut-on dire des droites (AB) et (AC) ?
- 5 $D(5; 1), E(2; 7)$. Calculer $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DE}$.
- 6 En déduire la longueur DE .

CONSEILS

- ▶ $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A)$.
- ▶ Un angle droit se prouve par un produit scalaire nul.
- ▶ Une longueur se déduit du carré de la norme.

VIGILANCE

- ▶ Respecter l'ordre dans $\overrightarrow{AB}$.
- ▶ Une longueur est positive.

- 1 $\overrightarrow{AB}(4 - 1; 3 - 2) = (3; 1)$.
- 2 $\overrightarrow{AC}(2 - 1; -1 - 2) = (1; -3)$.
- 3 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3 \times 1 + 1 \times (-3) = 0$.
- 4 Le produit scalaire est nul, donc (AB) et (AC) sont perpendiculaires.
- 5 $\overrightarrow{DE}(-3; 6)$, donc $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DE} = (-3)^2 + 6^2 = 45$.
- 6 $DE = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$.

MÉTHODE

En repère, une preuve géométrique peut devenir un calcul de coordonnées puis de produit scalaire.

VIGILANCE

Ne pas conclure à une perpendicularité avec deux vecteurs seulement proportionnels.

Choisir la bonne réponse. Une seule réponse est correcte.

- 1 Si $\vec{u}(1; -2)$ et $\vec{v}(4; 2)$, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} =$ **A. 8** **B. 0** **C. -8**
- 2 Si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, alors les vecteurs sont **A. égaux** **B. orthogonaux** **C. colinéaires**
- 3 $\vec{u} \cdot \vec{u}$ est égal à **A. $\|\vec{u}\|$** **B. $2\|\vec{u}\|$** **C. $\|\vec{u}\|^2$**
- 4 Un produit scalaire négatif correspond à un angle **A. aigu** **B. droit** **C. obtus**
- 5 Si $\|\vec{u}\| = 6$, $\|\vec{v}\| = 2$, $\theta = 60^\circ$, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} =$ **A. 6** **B. 12** **C. 3**

CONSEILS

- Calculer avant de choisir.
- Repérer les mots-clés : nul, négatif, carré de la norme.
- Vérifier les signes.

VIGILANCE

- Orthogonal et colinéaire sont deux idées différentes.
- $\vec{u} \cdot \vec{u}$ n'est pas un produit de coordonnées quelconque.

- 1 $1 \times 4 + (-2) \times 2 = 0$. Réponse **B**.
- 2 Un produit scalaire nul caractérise l'orthogonalité. Réponse **B**.
- 3 $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$. Réponse **C**.
- 4 Un produit scalaire négatif donne un cosinus négatif. Réponse **C**.
- 5 $6 \times 2 \times \frac{1}{2} = 6$. Réponse **A**.

MÉTHODE

Dans un QCM, une formule simple suffit souvent à éliminer deux réponses.

VIGILANCE

Ne pas répondre au seul souvenir : faire le calcul éclair.