

TD S28 — Variables aléatoires, espérance et simulation

Première STMG — Mathématiques

Objectif. Définir et exploiter une variable aléatoire discrète, construire une loi de probabilité, calculer et interpréter une espérance, reconnaître une loi de Bernoulli et observer la fluctuation de fréquences simulées.

Conseils. Toujours définir la grandeur représentée par X , vérifier que les probabilités totalisent 1 et conserver les unités dans l'interprétation de l'espérance.

Vigilance. Une espérance est une moyenne théorique, pas un résultat garanti. Une fréquence simulée n'est pas exactement égale au paramètre p .

Parcours conseillé. Classe : 1 à 7, 9 à 13, 16, 18, 20, 24 : 23, 27 et 28

Maison : 8, 14, 15, 17, 19, 21, 22, 25, 26

Approfondir

A — Variables aléatoires et lois de probabilité

① ★ [REP]

Une roue permet de gagner 0, 2 ou 5 euros. On note X le gain obtenu. Donner les valeurs possibles de X et traduire :

$$\{X = 2\}, \quad \{X \leq 2\}.$$

② ★ [REP]

Pour chaque situation, proposer une variable aléatoire :

- nombre de défauts parmi trois pièces ;
- gain algébrique d'un jeu ;
- remise obtenue par un client ;
- délai de livraison en jours.

③ ★ [CAL]

Compléter la loi :

x	0	1	3
$P(X = x)$	0,45	0,35	...

④ ★ [CAL]

La loi de X est :

x	-2	0	3	8
$P(X = x)$	0,20	0,40	0,30	0,10

Calculer :

$$P(X = 3), \quad P(X \leq 0), \quad P(X > 0).$$

⑤ ★ [CAL, REP]

On donne

$$P(X = -1) = 0,25,$$

$$P(X = 2) = 0,50, \quad P(X = 4) = 0,25.$$

Présenter la loi dans un tableau et calculer $P(X \leq 2)$.

⑥ ★ [RAI]

Le tableau suivant peut-il être une loi de probabilité ?

x	1	2	3
$P(X = x)$	0,25	0,40	0,45

Justifier.

⑦ ★ [REP, COM]

Une variable X représente un gain algébrique en euros.

Interpréter :

$$P(X < 0) = 0,18.$$

⑧ ★★ [CH, RAI]

Créer une loi de probabilité sur quatre valeurs, dont une valeur négative, telle que

$$P(X \leq 0) = 0,55.$$

B — Espérance et décisions

⑨ ★ [CAL]

Pour la loi

x	0	2	5
$P(X = x)$	0,50	0,30	0,20

calculer $E(X)$.

⑩ ★ [CAL, COM]

Une remise aléatoire vaut 0, 5 ou 20 euros avec les probabilités 0,70, 0,25 et 0,05. Calculer la remise moyenne à prévoir et interpréter.

⑪ ★ [CAL]

Un jeu fait gagner 6 euros avec la probabilité 0,30 et perdre 2 euros sinon. Calculer l'espérance du gain algébrique.

⑫ ★ [RAI, COM]

Dans l'exercice 11, expliquer pourquoi l'espérance ne garantit ni un gain ni une perte lors d'une partie isolée.

⑬ ★ [CAL, RAI]

Un jeu coûte 1,50 euro. Le gain brut vaut 0, 2 ou 10 euros avec les probabilités 0,60, 0,30 et 0,10. Définir le gain algébrique X , donner sa loi et calculer $E(X)$.

⑭ ★★ [CAL, COM]

Une garantie coûte à l'entreprise :

$$0, \quad 20, \quad 80, \quad 300 \text{ euros}$$

avec probabilités respectives

$$0,82, \quad 0,10, \quad 0,06, \quad 0,02.$$

Calculer le coût moyen par contrat et proposer un tarif minimal moyen permettant de couvrir ce coût.

15 ** [CAL, RAI]

Deux campagnes promotionnelles ont les lois de coût suivantes :

x	0	2	8
$P(X = x)$	0,60	0,30	0,10

y	0	1	5
$P(Y = y)$	0,35	0,40	0,25

Comparer leurs espérances et rédiger une recommandation limitée au coût moyen.

16 * [RAI, COM]

Une variable X a pour espérance 4,2 euros. Peut-on affirmer que X prend la valeur 4,2 ? Expliquer.

17 ** [CH, MOD, RAI]

Construire une loi de probabilité ayant pour espérance 0 mais comportant une possibilité de gain et une possibilité de perte.

C — Bernoulli, simulation et fluctuation

18 * [REP, CAL]

On définit $X = 1$ si un paiement est accepté et $X = 0$ sinon. Le paiement est accepté avec la probabilité 0,94. Donner la loi de X et calculer $E(X)$.

19 ** [REP]

Pour chaque variable, dire si elle suit une loi de Bernoulli :

1. nombre de clics obtenus parmi trois affichages ;
2. $X = 1$ si un client clique et 0 sinon ;
3. montant d'une remise pouvant valoir 0, 5 ou 10 euros ;
4. indicateur $X = 1$ si une pièce est défectueuse et 0 sinon.

20 * [CAL]

Une variable X suit une loi de Bernoulli de paramètre 0,27. Compléter :

$$P(X = 1) = \dots, \quad P(X = 0) = \dots, \quad E(X) = \dots$$

21 ** [REP, RAI]

On utilise :

```
from random import random
def bernoulli(p):
    if random() < p:
        return 1
    return 0
```

Expliquer le rôle de p , le test effectué et les deux valeurs renvoyées.

22 ** [CAL, REP]

Une simulation de 50 Bernoulli de paramètre 0,40 produit 17 succès. Calculer la fréquence observée et la comparer au paramètre.

23 *** [RAI, COM]

Trois échantillons de taille 100, simulés avec $p = 0,35$, donnent les fréquences

0,29, 0,37, 0,41.

Expliquer pourquoi ces valeurs peuvent différer. Dire lesquelles appartiennent à l'intervalle

$[0,30 ; 0,40]$.

D — Problèmes et algorithmique

24 *** [MOD, CAL, COM]

Programme de fidélité. Un client reçoit une remise X :

x	0	2	5	15
$P(X = x)$	0,55	0,25	0,15	0,05

1. Calculer $P(X \leq 2)$ et $P(X > 2)$.
2. Calculer et interpréter $E(X)$.
3. Estimer le coût total moyen pour 20 000 clients.
4. Expliquer pourquoi le coût réel peut être différent.

25 *** [MOD, CAL, RAI, COM]

Contrat de maintenance. Le gain algébrique de l'entreprise par contrat est :

x	-180	20	60	100
$P(X = x)$	0,05	0,15	0,30	0,50

1. Vérifier qu'il s'agit d'une loi de probabilité.
2. Calculer $P(X \leq 20)$.
3. Calculer l'espérance.
4. Interpréter le signe de l'espérance.
5. Donner une limite à une décision fondée uniquement sur cette moyenne.

26 *** [MOD, REP, CAL, COM]

Campagne numérique. Un affichage provoque un clic avec la probabilité $p = 0,08$. On note $X = 1$ en cas de clic et $X = 0$ sinon.

1. Donner la loi et l'espérance de X .
2. Simuler un échantillon de 1000 affichages.
3. Expliquer comment calculer la fréquence des clics.
4. Indiquer pourquoi cette fréquence peut ne pas être exactement 0,08.
5. Estimer le nombre moyen de clics sur 50 000 affichages.

27 *** [MOD, RAI, CAL]

Étude de fluctuation. On veut simuler 200 échantillons de taille 100 d'une loi de Bernoulli de paramètre 0,30.

1. Compléter l'algorithme :

```
compteur = 0
for k in range(200):
    f = frequence(100, 0.30)
    if 0.25 <= f and f <= 0.35:
        compteur = ...
print(compteur)
```

2. Expliquer ce que compte la variable `compteur`.
3. Pourquoi le résultat varie-t-il d'une exécution à l'autre ?
4. Prévoir qualitativement l'effet d'une taille 1 000 au lieu de 100.

28***[CH, MOD, REP, RAI, COM]

Créer une situation de gestion : donner la loi de X , calculer $P(X \leq a)$ et $E(X)$, définir une Bernoulli associée,

puis décrire une simulation de 100 observations et sa fluctuation.