

TD S26–S27 — Épreuves de Bernoulli et répétitions indépendantes

Première STMG — Mathématiques

Objectif. Reconnaître une épreuve de Bernoulli, construire des arbres de répétitions identiques et indépendantes avec au plus quatre épreuves, calculer des probabilités de chemins et traiter les événements « exactement », « au moins » ou « au plus ».

Conseils. Définir le succès et son paramètre p . Sur un arbre, multiplier le long d'un chemin et additionner les chemins retenus. Utiliser un événement contraire lorsqu'il simplifie le calcul.

Vigilance. L'indépendance doit être donnée ou justifiée par le modèle. La loi binomiale n'est pas utilisée dans cette notion.

Parcours conseillé. Classe : 1 à 7, 9 à 13, 16, 18, 20, 24 **Maison :** 8, 14, 15, 17, 19, 21, 22, 25, 26 **Approfondir :** 23, 27 et 28

A — Reconnaître une épreuve de Bernoulli

1 ★ [REP]

Pour chaque situation, dire s'il s'agit d'une épreuve de Bernoulli :

1. un paiement est accepté ou refusé ;
2. un client choisit parmi trois abonnements ;
3. une pièce est conforme ou non conforme ;
4. la note obtenue à un test est relevée sur 20.

2 ★ [REP]

Pour chaque contexte, choisir un succès S et écrire son échec $\bar{S}$:

1. réponse à une offre commerciale ;
2. contrôle qualité d'un produit ;
3. livraison réalisée à l'heure.

3 ★ [CAL]

Une vente est conclue avec la probabilité 0,38. Donner le paramètre p et la probabilité de l'échec.

4 ★ [CAL]

Une pièce présente un défaut avec une probabilité de 2,5 %. On choisit S : « la pièce est défectueuse ». Calculer $P(S)$ et $P(\bar{S})$.

5 ★ [REP, RAI]

Le mot « succès » désigne « un colis arrive en retard ». Expliquer pourquoi ce choix est mathématiquement possible.

6 ★ [RAI]

Une roue possède quatre couleurs. Proposer un regroupement permettant de construire une épreuve de Bernoulli.

7 ★ [REP, COM]

Une campagne obtient un clic avec la probabilité 0,12. Interpréter $p = 0,12$ puis $1 - p$ dans le contexte.

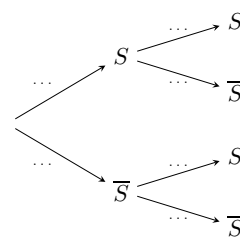
8 ★★ [CH, RAI]

Créer une épreuve de Bernoulli dans un contexte de gestion avec un paramètre compris entre 0,2 et 0,8. Préciser le succès, l'échec et les deux probabilités.

B — Arbres de répétitions indépendantes

9 ★ [REP, CAL]

Compléter l'arbre de deux répétitions pour $p = 0,40$, puis calculer la probabilité de chacun des quatre chemins.



10 ★ [CAL]

Pour deux répétitions indépendantes avec $p = 0,65$, calculer :

$$P(SS), \quad P(S\bar{S}), \quad P(\bar{S}S), \quad P(\bar{S}\bar{S}).$$

11 ★ [CAL, REP]

Trois paiements indépendants sont acceptés avec la probabilité 0,92. Calculer la probabilité du chemin :

$$S\bar{S}S.$$

Interpréter ce chemin.

12 ★ [CAL]

Une épreuve de paramètre $p = 0,25$ est répétée trois fois indépendamment. Calculer :

$$P(SSS) \quad \text{et} \quad P(\bar{S}\bar{S}\bar{S}).$$

13 ★ [REP, RAI]

Combien de chemins complets possède un arbre pour :

$$n = 1, \quad n = 2, \quad n = 3, \quad n = 4?$$

Conjecturer une formule.

14 ★★ [CAL, REP]

Une pièce est conforme avec la probabilité 0,97. Quatre pièces sont contrôlées indépendamment. Calculer la probabilité que les quatre pièces soient conformes.

15 ** [RAI, COM]

Un élève utilise des probabilités 0,30, puis 0,45, puis 0,50 pour les branches « succès » de trois niveaux. Expliquer pourquoi son arbre ne représente pas des répétitions identiques d'une même épreuve.

C — Exactement, au moins et événement contraire

16 * [CAL]

Deux clients répondent indépendamment à une offre avec $p = 0,40$. Calculer la probabilité d'obtenir exactement un succès.

17 ** [CAL, RAI]

Trois prospects acceptent indépendamment avec $p = 0,20$. Lister les chemins correspondant à exactement un succès, puis calculer la probabilité de cet événement.

18 * [CAL]

Pour trois répétitions indépendantes avec $p = 0,30$, calculer la probabilité d'obtenir exactement deux succès.

19 ** [CAL, RAI]

Une pièce est défectueuse avec la probabilité 0,04. Trois pièces sont contrôlées indépendamment. Calculer la probabilité qu'au moins une pièce soit défectueuse en utilisant l'événement contraire.

20 * [CAL]

Quatre livraisons indépendantes sont à l'heure avec la probabilité 0,90. Calculer la probabilité que toutes les livraisons soient à l'heure.

21 ** [CAL, RAI]

Dans l'exercice 20, calculer la probabilité qu'au moins une livraison soit en retard.

22 ** [CAL, RAI]

Trois ventes indépendantes sont conclues avec $p = 0,35$. Calculer la probabilité d'obtenir au plus un succès.

23 *** [CH, RAI, COM]

Pour quatre répétitions indépendantes avec $p = 0,50$:

1. lister les chemins donnant exactement deux succès ;
2. calculer la probabilité de cet événement ;
3. contrôler le résultat par symétrie avec les échecs.

D — Problèmes contextualisés et algorithmique

24 *** [MOD, CAL, COM]

Campagne téléphonique. Un appel aboutit à une prise de rendez-vous avec la probabilité 0,25. Trois appels sont supposés indépendants.

1. Définir l'épreuve de Bernoulli.
2. Construire l'arbre.
3. Calculer la probabilité d'obtenir exactement deux rendez-vous.
4. Calculer la probabilité d'obtenir au moins un rendez-vous.
5. Interpréter les deux résultats.

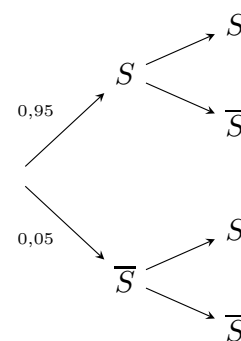
25 *** [MOD, CAL, RAI, COM]

Contrôle de paiements. Un paiement en ligne est validé avec la probabilité 0,96. Quatre paiements sont supposés indépendants.

1. Calculer la probabilité que les quatre paiements soient validés.
2. Calculer la probabilité qu'au moins un paiement soit refusé.
3. L'entreprise traite 10 000 groupes de quatre paiements. Donner un ordre de grandeur du nombre de groupes contenant au moins un refus.
4. Expliquer la différence entre une probabilité et un effectif réellement observé.

26 *** [MOD, REP, CAL, COM]

Une machine produit une pièce conforme avec la probabilité 0,95. Trois pièces sont contrôlées indépendamment. L'arbre fournit les deux premiers niveaux : ajouter le troisième niveau, calculer la probabilité d'obtenir exactement deux pièces conformes et rédiger une conclusion pour le responsable qualité.



27 *** [MOD, CAL, RAI]

Algorithme de chemins. On utilise la fonction :

```
def proba_chemin(chemin, p):
    q = 1
    for lettre in chemin:
        if lettre == "S":
            q = q*p
        else:
            q = q*(1-p)
    return q
```

1. Calculer le résultat pour "SSE" et $p = 0,40$.
2. Expliquer le rôle de la variable q .
3. Modifier l'appel pour calculer le chemin « échec, succès, échec, succès ».
4. Expliquer pourquoi plusieurs appels sont nécessaires pour « exactement deux succès ».

28 *** [CH, MOD, REP, RAI, COM]

Dossier de décision. Créer une situation de gestion reposant sur trois ou quatre répétitions indépendantes d'une épreuve de Bernoulli. Le dossier doit comporter :

1. la définition du succès et du paramètre ;
2. un arbre pondéré ;
3. la probabilité d'un chemin précis ;
4. la probabilité d'exactly k succès ;
5. une question « au moins » traitée par un événement contraire ;
6. une conclusion avec interprétation et limite du modèle.