

TD S25 — Probabilités conditionnelles et indépendance

Première STMG — Mathématiques

Objectif. Distinguer intersection et conditionnement, lire tableaux et arbres pondérés, utiliser la formule des probabilités totales et reconnaître ou justifier l'indépendance de deux événements.

Conseils. Traduire chaque notation par une phrase. Dans un arbre, multiplier le long d'un chemin puis additionner les chemins conduisant au même événement.

Vigilance. $P(A \cap B)$, $P_A(B)$ et $P_B(A)$ n'ont pas le même dénominateur. Indépendance et incompatibilité sont deux notions différentes.

Parcours conseillé. Classe : 1 à 7, 9 à 13, 16, 18, 20, 24 **Maison :** 8, 14, 15, 17, 19, 21, 22, 25, 26 **Approfondir :** 23, 27 et 28

A — Automatismes : notations et calculs courts

1 ★ [REP]

Traduire par une phrase :

$$P(A \cap B), \quad P_A(B), \quad P_B(A).$$

2 ★ [CAL]

Calculer :

$$P(A \cap B)$$

si $P(A) = 0,40$ et $P_A(B) = 0,25$.

3 ★ [CAL]

Calculer $P_A(B)$ si

$$P(A) = 0,60, \quad P(A \cap B) = 0,18.$$

4 ★ [CAL]

Compléter :

$$P_A(B) = 0,72 \implies P_A(\overline{B}) = \dots$$

5 ★ [REP, RAI]

Associer chaque expression à la bonne description :

$$P(C \cap F), \quad P_C(F), \quad P_F(C).$$

Événements : C « client fidèle » et F « achat en ligne ».

6 ★ [CAL, RAI]

Tester l'indépendance de A et B :

$$P(A) = 0,30, \quad P(B) = 0,50, \quad P(A \cap B) = 0,15.$$

7 ★ [RAI]

Deux événements incompatibles vérifient

$$P(A) = 0,4, \quad P(B) = 0,2.$$

Sont-ils indépendants ? Justifier.

8 ★★ [CH, COM]

Créer un exemple numérique où

$$P_A(B) \neq P_B(A).$$

Présenter les données dans un tableau de 100 individus.

B — Tableaux croisés et conditionnement

9 ★ [CAL, REP]

Dans un lycée, 240 élèves sont interrogés :

	demi-pension D	$\overline{D}$	total
filles F	84	56	140
$\overline{F}$	48	52	100
total	132	108	240

Calculer $P(F \cap D)$, $P_F(D)$ et $P_D(F)$.

10 ★ [CAL, COM]

Dans l'exercice 9, interpréter chacune des trois probabilités calculées avec une phrase complète.

11 ★ [CAL, REP]

Une entreprise étudie 500 factures :

	retard R	$\overline{R}$	total
international I	30	120	150
$\overline{I}$	20	330	350
total	50	450	500

Calculer $P(R)$, $P_I(R)$ et $P_R(I)$.

12 ★ [CAL, RAI]

À partir de l'exercice 11, comparer $P_I(R)$ et $P(R)$. Les événements I et R semblent-ils indépendants ?

13 ★ [CAL, REP]

Compléter le tableau :

	A	$\overline{A}$	total
B	36	24	60
$\overline{B}$	54	...	140
total	90	110	200

Puis calculer $P_A(B)$ et $P_B(A)$.

14 ★★ [CAL, RAI]

Dans une enquête :

$$P(A) = 0,45, \quad P(B) = 0,30, \quad P(A \cap B) = 0,18.$$

Construire un tableau de probabilités complet pour A , $\overline{A}$, B et $\overline{B}$.

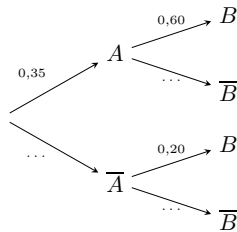
15 ** [RAI, COM]

Un responsable affirme : « 20 % des commandes express sont en retard, donc 20 % des commandes en retard sont express. » Expliquer l'erreur à l'aide des notations conditionnelles.

C — Arbres et probabilités totales

16 * [REP, CAL]

Compléter les branches manquantes, puis calculer $P(A \cap B)$ et $P(\overline{A} \cap B)$.



17 ** [CAL, REP]

Dans l'arbre de l'exercice 16, calculer $P(B)$ par la formule des probabilités totales.

18 * [MOD, CAL]

Une banque classe ses clients en deux groupes :

$$P(J) = 0,40, \quad P_J(M) = 0,70, \quad P_{\overline{J}}(M) = 0,25,$$

où J signifie « moins de 30 ans » et M « utilise l'application mobile ». Construire l'arbre et calculer $P(M)$.

19 ** [MOD, CAL, COM]

Dans l'exercice 18, calculer $P_M(J)$ et interpréter le résultat.

20 * [MOD, CAL]

Un fournisseur livre 65 % des pièces par le site S_1 et le reste par S_2 . Le taux de défaut est de 2 % pour S_1 et 5 % pour S_2 . Calculer la probabilité qu'une pièce soit défectueuse.

21 ** [MOD, CAL, COM]

Dans l'exercice 20, une pièce est défectueuse. Calculer la probabilité qu'elle provienne de S_2 , puis interpréter.

22 ** [RAI, COM]

Un élève écrit :

$$P(B) = P_A(B) + P_{\overline{A}}(B).$$

Expliquer pourquoi cette formule est généralement fautive et donner la formule correcte.

23 *** [CH, MOD, RAI]

Construire un arbre pondéré ayant deux chemins conduisant à B et tel que

$$P(B) = 0,40.$$

Les probabilités choisies doivent être différentes sur les deux branches conditionnelles.

D — Indépendance et problèmes de synthèse

24 ** [CAL, RAI]

On donne

$$P(A) = 0,45, \quad P(B) = 0,20, \quad P(A \cap B) = 0,09.$$

Justifier que A et B sont indépendants, puis calculer $P_A(B)$ et $P_B(A)$.

25 ** [CAL, RAI]

Dans une population,

$$P(C) = 0,60, \quad P_C(F) = 0,35, \quad P(\overline{F}) = 0,28.$$

Les événements C et F sont-ils indépendants ? Justifier par deux méthodes.

26 *** [MOD, CAL, RAI, COM]

Contrôle qualité. Une usine utilise deux lignes :

$$P(L_1) = 0,70, \\ P_{L_1}(D) = 0,015, \quad P_{L_2}(D) = 0,040.$$

1. Construire un arbre pondéré.
2. Calculer $P(D)$.
3. Calculer $P_D(L_2)$.
4. Tester l'indépendance de L_2 et D .
5. Rédiger une conclusion pour le responsable qualité.

27 *** [MOD, CAL, RAI, COM]

Fidélité et achat en ligne. Sur 800 clients, 320 sont fidèles. Parmi eux, 224 achètent en ligne. Parmi les 480 autres clients, 240 achètent en ligne.

1. Construire le tableau croisé.
2. Calculer $P(F \cap L)$, $P_F(L)$ et $P_L(F)$.
3. Calculer $P(L)$ par les probabilités totales.
4. Tester l'indépendance de F et L .
5. Interpréter les résultats.

28 *** [CH, MOD, REP, RAI, COM]

Dossier de décision. Créer une situation de gestion comportant deux catégories A et $\overline{A}$, ainsi qu'un événement B . Fournir des données cohérentes, puis demander :

1. un tableau croisé et un arbre pondéré ;
2. deux probabilités conditionnelles inversées ;
3. une probabilité totale ;
4. un test d'indépendance ;
5. une conclusion destinée à un décideur.