

TD S23–S24 — Ajustement affine, interpolation et extrapolation

Première STMG — Mathématiques

Objectif. Déterminer et utiliser un ajustement affine au jugé, par Mayer ou par moindres carrés, interpoler ou extrapoler une valeur et exercer un esprit critique sur la pertinence d'une prévision.

Conseils. Toujours observer le nuage avant de choisir une droite. Pour Mayer, classer les abscisses et former deux groupes de même effectif. Pour une prévision, préciser interpolation ou extrapolation.

Vigilance. Les moindres carrés sont obtenus avec un outil : aucune théorie n'est demandée. Une extrapolation lointaine doit être explicitement critiquée.

Parcours conseillé. Classe : 1 à 7, 9 à 13, 16, 18, 20, 24 : 23, 27 et 28 **Maison :** 8, 14, 15, 17, 19, 21, 22, 25, 26 **Approfondir**

A — Droites, nuages et ajustement au jugé

1 ★ [CAL]

Déterminer l'équation réduite de la droite passant par

$$A(2; 7) \quad \text{et} \quad B(6; 19).$$

2 ★ [CAL]

Pour la droite $y = 2,5x + 8$, calculer :

$$y(4), \quad y(10), \quad y(15).$$

3 ★ [CAL, RAI]

Résoudre :

$$2,5x + 8 = 38.$$

Interpréter le résultat comme la valeur de x correspondant à $y = 38$.

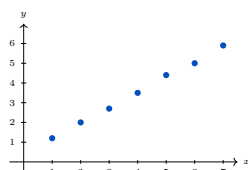
4 ★ [REP, RAI]

Pour chaque nuage décrit, indiquer si un ajustement affine semble pertinent :

1. points proches d'une droite croissante ;
2. points disposés sur une parabole ;
3. points très dispersés sans direction nette ;
4. points proches d'une droite sauf un point atypique.

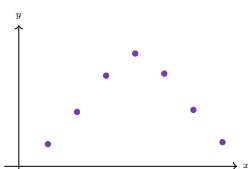
5 ★ [REP, RAI]

Tracer au jugé une droite d'ajustement, choisir deux points lisibles sur cette droite et déterminer son équation.



6 ★ [REP, RAI]

Expliquer pourquoi une droite d'ajustement affine n'est pas pertinente pour ce nuage.



7 ★ [REP, COM]

Une droite d'ajustement a pour équation

$$y = 4x + 30.$$

Interpréter le coefficient 4 si x est une dépense en milliers d'euros et y un chiffre d'affaires en milliers d'euros.

8 ★★ [RAI, COM]

Deux élèves obtiennent les droites

$$y = 2,6x + 9,5 \quad \text{et} \quad y = 2,8x + 8,2$$

par ajustement au jugé du même nuage. Expliquer pourquoi cette différence est possible et proposer deux critères de comparaison.

B — Mayer et moindres carrés

9 ★ [CAL, REP]

On donne :

x	2	4	6	8	10	12
y	15	20	24	31	35	42

Calculer les points moyens G_1 et G_2 des deux groupes de trois points.

10 ★ [CAL]

À partir de l'exercice 9, déterminer l'équation de la droite de Mayer, arrondie au centième.

11 ★ [CAL, RAI]

Calculer le point moyen global G de la série de l'exercice 9, puis vérifier qu'il appartient à la droite de Mayer à l'arrondi près.

12 ★ [CAL, REP]

Pour la série

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	8	11	15	17	21	24	27	31

appliquer la méthode de Mayer et déterminer une équation de la droite obtenue.

13 ★ [REP, RAI]

Expliquer pourquoi la méthode de Mayer exige de classer les points par abscisses croissantes avant de former les deux groupes.

14 ★★ [CAL, REP]

Une calculatrice fournit, pour une série, les coefficients

$$a = 3,25, \quad b = 39,2.$$

1. Écrire l'équation de la droite des moindres carrés.
2. Calculer la valeur estimée de y pour $x = 9$.
3. Résoudre l'équation correspondant à $y = 75$.

15 ★★ [REP, RAI]

Dans un tableur, les valeurs de x sont en A2 :A9 et les valeurs de y en B2 :B9. Décrire les étapes permettant d'obtenir :

- le nuage de points ;
- la droite de tendance affine ;
- son équation.

16 ★ [CAL, RAI]

Pour le modèle

$$y = 2,67x + 9,13,$$

calculer la valeur estimée de y pour $x = 2$, $x = 7$ et $x = 12$. Comparer avec les données (2 ; 15), (6 ; 24), (8 ; 31) et (12 ; 42).

17 ★★ [RAI, COM]

Comparer les trois méthodes : au jugé, Mayer et moindres carrés. Pour chacune, donner un avantage et une limite.

C — Interpolation, extrapolation et critique

18 ★ [CAL, REP]

Les abscisses observées vont de 4 à 12. Classer :

$$x = 5, \quad x = 9, \quad x = 12, \quad x = 14, \quad x = 30$$

en interpolation ou extrapolation.

19 ★★ [CAL, COM]

Un modèle est

$$y = 3,25x + 39,2$$

pour des données observées entre $x = 4$ et $x = 12$.

1. Estimer y pour $x = 8$.
2. Estimer y pour $x = 15$.
3. Préciser la nature de chaque estimation.

20 ★ [CAL, RAI]

Avec le modèle

$$y = 4x + 25,$$

déterminer la valeur de x correspondant à $y = 89$. Dire si cette utilisation est une interpolation si les abscisses observées vont de 5 à 20.

21 ★★ [RAI, COM]

Un modèle de chiffre d'affaires a été construit avec des budgets publicitaires compris entre 3 et 12 milliers d'euros. Critiquer une prévision obtenue pour un budget de 100 milliers d'euros.

22 ★★ [RAI, COM]

Un nuage possède une tendance presque affine, sauf un point très éloigné des autres. Expliquer comment ce point peut modifier :

- le point moyen ;
- une droite de Mayer ;
- une droite des moindres carrés ;
- la qualité des prévisions.

23 ★★★ [CH, RAI, COM]

Construire deux nuages de six points :

- l'un pour lequel une interpolation affine semble raisonnable ;
- l'autre pour lequel un ajustement affine serait trompeur.

Justifier par la forme des nuages.

D — Problèmes de gestion

24 *** [MOD, CAL, REP, COM]

Publicité et ventes.

x	4	6	8	10	12	14
y	52	59	65	72	78	85

Les valeurs sont en milliers d'euros.

1. Construire le nuage et calculer le point moyen.
2. Déterminer une droite de Mayer.
3. Un outil fournit $y = 3,27x + 39,06$. Utiliser cette droite pour estimer y lorsque $x = 11$.
4. Estimer le budget correspondant à $y = 90$.
5. Critiquer cette seconde estimation.

25 *** [MOD, CAL, RAI, COM]

Ancienneté et salaire.

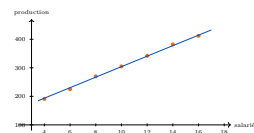
x	1	3	5	7	9	12	15	18
y	21	22	24	26	27	31	33	35

L'ancienneté est en années et le salaire en centaines d'euros.

1. Calculer les deux points moyens de Mayer.
2. Déterminer la droite de Mayer.
3. Estimer le salaire pour 10 ans d'ancienneté.
4. Estimer le salaire pour 30 ans d'ancienneté.
5. Comparer la fiabilité des deux estimations.

26 *** [MOD, REP, CAL, COM]

Une entreprise étudie le nombre de salariés x et la production hebdomadaire y . Un outil donne la droite $y = 18,4x + 120$. Lire le domaine des données sur le graphique, estimer la production pour $x = 14$, puis critiquer une prévision pour $x = 40$.



27 *** [MOD, CAL, REP, COM]

Température et consommation.

T	2	5	8	11	14	17	20	23
C	410	386	352	328	295	270	242	218

T est une température en degrés Celsius et C une consommation en kWh.

1. Décrire la tendance.
2. Déterminer une droite de Mayer.
3. Estimer la consommation à 12°C .
4. Estimer la consommation à 35°C .
5. Expliquer pourquoi la seconde valeur doit être interprétée avec prudence.

28 *** [CH, MOD, REP, RAI, COM]

Mini-étude d'ajustement. Créer une série originale de huit couples dans un contexte de gestion, puis :

1. construire le nuage et calculer le point moyen ;
2. justifier la pertinence ou non d'un ajustement affine ;
3. déterminer une droite de Mayer ;
4. proposer une interpolation ;
5. proposer une extrapolation ;
6. comparer leur fiabilité ;
7. rédiger une conclusion destinée à un décideur.