

TD S19–S20 — Variations et extremums par dérivation

Première STMG — Mathématiques

Objectif. Relier le signe de la dérivée aux variations, construire et exploiter un tableau de variations, déterminer des extremums sur un intervalle et résoudre des problèmes simples d'optimisation en gestion.

Conseils. Toujours préciser l'intervalle d'étude. Calculer la dérivée, résoudre $f'(x) = 0$, étudier son signe, puis calculer les valeurs de f aux points critiques et aux bornes.

Vigilance. Le signe de f' donne les variations de f , pas le signe de f . Aucun discriminant n'est utilisé.

Parcours conseillé. Classe : 1 à 7, 9 à 13, 16, 18, 20, 24 **Maison :** 8, 14, 15, 17, 19, 21, 22, 25, 26 **Approfondir :** 23, 27 et 28

A — Réactivation : dérivées, signes et lectures

1 ★ [CAL]

Dériver :

$$f(x) = 3x^2 - 12x + 5, \quad g(x) = -2x^3 + 6x^2 + 4.$$

2 ★ [CAL]

Étudier le signe sur $\mathbb{R}$:

$$2x - 8, \quad -3x + 9, \quad 5(x - 2).$$

3 ★ [CAL, REP]

Étudier le signe :

$$(x - 1)(x - 5), \quad -2(x + 3)(x - 4).$$

4 ★ [REP]

Compléter :

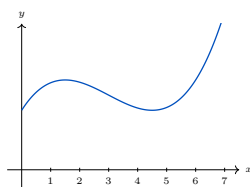
signe de f'	—	0	+
variation de f			

5 ★ [REP, RAI]

Une fonction est croissante sur $[-2; 4]$, puis décroissante sur $[4; 9]$. Quel signe peut avoir sa dérivée sur ces intervalles ? Quel extremum est atteint en 4 ?

6 ★ [REP, RAI]

La courbe représente une fonction f . Lire les intervalles de croissance et de décroissance, puis conjecturer le signe de f' .



7 ★ [REP, COM]

Dans un tableau de variations, expliquer le rôle des bornes, des zéros de f' , des flèches et des valeurs de f .

8 ★★ [RAI, COM]

Un élève affirme : « Si $f'(3) = 0$, alors $f(3) = 0$. » Expliquer l'erreur et donner un contre-exemple simple.

9 ★ [CAL, REP]

Soit

$$f(x) = x^2 - 6x + 11$$

sur $[0; 8]$. Calculer $f'(x)$, étudier son signe et construire le tableau de variations.

10 ★ [CAL, REP]

Soit

$$g(x) = -2x^2 + 16x - 5$$

sur $[0; 10]$. Construire son tableau de variations et déterminer son maximum.

11 ★ [CAL, REP]

Soit

$$h(x) = 3x^2 + 12x + 7$$

sur $[-5; 2]$. Construire son tableau de variations et déterminer son minimum.

12 ★ [CAL, REP]

La dérivée de p est

$$p'(x) = 4(x - 3).$$

Sachant que $p(0) = 20$, $p(3) = 2$ et $p(7) = 34$, construire le tableau de variations de p sur $[0; 7]$.

13 ★ [REP, RAI]

Compléter le tableau :

x	-2	1	5
$f'(x)$	—	0	+
$f(x)$	8		15

Donner le minimum et les intervalles de variation.

14 ★★ [CAL, REP]

Soit

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 5.$$

- Calculer $f'(x)$.
- Vérifier que $f'(x) = 3(x - 1)(x - 3)$.
- Construire le tableau de variations sur $[0; 4]$.

B — Construire des tableaux de variations

15 ** [CAL, REP]

Soit

$$g(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 4.$$

1. Calculer et factoriser $g'(x)$.
2. Étudier les variations sur $[0; 5]$.
3. Déterminer les extremums sur cet intervalle.

16 * [REP, RAI]

Une dérivée est négative sur $[-4; -1[$, nulle en -1 , positive sur $] -1; 3[$, nulle en 3 , puis négative après 3 . Décrire les variations et la nature des extremums.

17 ** [CAL, RAI]

La dérivée de q est

$$q'(x) = -2(x+1)(x-5).$$

Étudier le signe de q' et les variations de q sur $[-3; 7]$. Aucune expression de $q(x)$ n'est nécessaire.

C — Extremums, bornes et erreurs

18 * [RAI, COM]

Expliquer pourquoi un point où $f'(a) = 0$ n'est pas toujours un extremum. Donner l'exemple de $f(x) = x^3$ en $a = 0$.

19 ** [RAI, COM]

Un élève trouve un maximum local égal à 12 en $x = 4$ et conclut que 12 est le maximum sur $[0; 10]$. Quelle vérification manque-t-il ?

20 * [CAL, RAI]

Soit

$$f(x) = -x^2 + 10x - 12$$

sur $[0; 8]$. Déterminer son maximum sur l'intervalle et la valeur de x correspondante.

21 ** [CAL, RAI]

Soit

$$g(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$$

sur $[-2; 5]$. On admet

$$g'(x) = 3(x+1)(x-3).$$

Construire le tableau de variations et déterminer le minimum et le maximum sur l'intervalle.

22 ** [REP, RAI]

On donne le tableau de variations d'une fonction sur $[-1; 6]$:

x	-1	2	4	6
$f(x)$	1	9	3	7

Donner les extremums locaux et les extremums sur l'intervalle.

23 *** [CH, RAI, COM]

Construire une fonction polynôme de degré 3 dont la dérivée est

$$f'(x) = 3(x-1)(x-5).$$

Donner une expression possible de f , puis décrire ses variations.

24 ** [MOD, CAL, COM]

Le coût moyen, en euros, est

$$C(x) = 0,5x^2 - 20x + 350$$

pour $x \in [5; 35]$. Déterminer le coût moyen minimal et la production correspondante.

25 ** [MOD, CAL, COM]

La recette, en milliers d'euros, est

$$R(x) = -0,2x^2 + 12x$$

pour $x \in [0; 60]$. Déterminer la recette maximale et interpréter le résultat.

D — Problèmes d'optimisation

26 *** [MOD, CAL, RAI, COM]

Le bénéfice, en milliers d'euros, d'une entreprise est

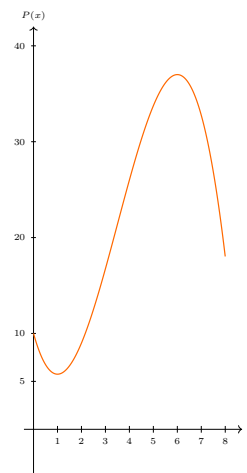
$$B(x) = -x^2 + 48x - 320$$

pour $x \in [0; 40]$, où x est le nombre de centaines d'articles.

1. Calculer $B'(x)$.
2. Construire le tableau de variations.
3. Déterminer le bénéfice maximal.
4. Interpréter la production optimale.

27 *** [MOD, REP, CAL, COM]

Le résultat mensuel, en milliers d'euros, est modélisé par $P(x) = -0,5x^3 + 5,25x^2 - 9x + 10$ sur $[0; 8]$. On admet $P'(x) = -1,5(x-1)(x-6)$. Construire le tableau de variations, déterminer le meilleur niveau de production et vérifier la cohérence avec la courbe.



28 *** [CH, MOD, RAI, COM]

Créer un problème réaliste de coût, recette ou bénéfice sur un intervalle fermé. Le modèle doit être un polynôme de degré 2 ou 3 dont la dérivée se factorise simplement. Le problème doit demander :

1. le calcul de la dérivée ;
2. l'étude du signe ;
3. le tableau de variations ;
4. un extremum ;
5. une interprétation avec unités et décision.