

TD S18 — Fonction dérivée et polynômes de degré au plus 3

Première STMG — Mathématiques

Objectif. Comprendre la fonction dérivée, utiliser les dérivées de référence et les règles de linéarité, dériver un polynôme de degré au plus 3, calculer un nombre dérivé et déterminer l'équation réduite d'une tangente.

Conseils. Dériver terme à terme, conserver les coefficients et faire disparaître les constantes. Pour une tangente, calculer séparément $f(a)$ et $f'(a)$, puis utiliser $y = f(a) + f'(a)(x - a)$.

Vigilance. Les règles du produit et du quotient ne sont pas utilisées. Ne pas confondre $f(a)$, $f'(a)$ et la fonction f' .

Parcours conseillé. Classe : 1 à 7, 9 à 13, 16, 18, 20, 24 **Maison :** 8, 14, 15, 17, 19, 21, 22, 25, 26 **Approfondir :** 23, 27 et 28

A — Réactivation et dérivées de référence

1 ★ [REP]

Dans chaque écriture, préciser ce qui est une fonction et ce qui est un nombre :

$$f', \quad f'(3), \quad f(3), \quad g'(x).$$

2 ★ [REP, COM]

Une tangente à la courbe de f au point d'abscisse 4 a pour pente -3 . Donner la valeur de $f'(4)$ et son interprétation graphique.

3 ★ [CAL]

Compléter :

$$(x)' = \dots, \quad (x^2)' = \dots, \\ (x^3)' = \dots, \quad (7)' = \dots$$

4 ★ [CAL]

Calculer :

$$a) (5x)', \quad b) (-3x^2)', \\ c) (2x^3)', \quad d) (-8)'.$$

5 ★ [CAL, REP]

Pour $f(x) = x^2$, donner $f'(x)$, puis calculer :

$$f'(-2), \quad f'(0), \quad f'(5).$$

6 ★ [CAL, REP]

Pour $g(x) = x^3$, donner $g'(x)$, puis calculer :

$$g'(-1), \quad g'(2), \quad g'(4).$$

7 ★ [RAI, COM]

Expliquer pourquoi la dérivée d'une fonction constante est nulle en utilisant l'idée de pente.

8 ★★ [CAL, RAI]

Réactiver N11. Pour $f(x) = x^2$, calculer le taux de variation entre 3 et $3 + h$, puis expliquer pourquoi il se rapproche de 6 lorsque h se rapproche de 0.

B — Dériver des polynômes

9 ★ [CAL]

Dériver :

$$f(x) = 4x^2 + 3x - 7.$$

10 ★ [CAL]

Dériver :

$$g(x) = -2x^3 + 5x^2 - 4x + 9.$$

11 ★ [CAL]

Dériver :

$$h(x) = 0,5x^3 - 1,2x^2 + 6.$$

12 ★ [CAL]

Dériver :

$$p(x) = 7 - 3x + 2x^2.$$

Écrire la dérivée dans l'ordre décroissant des puissances de x .

13 ★ [CAL, RAI]

Pour $q(x) = 3x^3 - 6x^2 + 2x - 1$:

- calculer $q'(x)$;
- calculer $q'(0)$, $q'(1)$ et $q'(2)$.

14 ★★ [CAL, RAI]

Déterminer les nombres a , b et c tels que

$$P'(x) = ax^2 + bx + c$$

pour

$$P(x) = -4x^3 + 7x^2 - 9x + 12.$$

15 ★★ [CAL, RAI]

Une fonction polynôme P vérifie

$$P'(x) = 6x^2 - 8x + 3.$$

Proposer une expression possible de $P(x)$. Expliquer pourquoi plusieurs réponses sont possibles.

16 ★ [CAL, COM]

Le coût total, en euros, est

$$C(x) = 0,04x^3 - 1,5x^2 + 30x + 500.$$

Calculer $C'(x)$, puis $C'(20)$. Interpréter ce dernier nombre comme un coût marginal.

17 ** [CAL, RAI]

Factoriser la dérivée de

$$f(x) = x^3 - 3x^2$$

puis résoudre $f'(x) = 0$. Cette question prépare l'étude de variations de N13.

C — Tangentes, erreurs et contrôles

18 * [CAL, REP]

Pour $f(x) = x^2 + 2x - 3$, calculer $f(1)$, $f'(x)$ et $f'(1)$.

19 ** [CAL, COM]

Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe de

$$f(x) = x^2 + 2x - 3$$

au point d'abscisse 1.

20 * [CAL, COM]

Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe de

$$g(x) = x^3 - 2x + 1$$

au point d'abscisse 0.

21 ** [CAL, RAI]

Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe de

$$h(x) = -x^3 + 3x^2 + 2$$

au point d'abscisse 2.

22 ** [RAI, COM]

Un élève dérive

$$f(x) = 3x^3 - 4x^2 + 5x - 6$$

et obtient

$$f'(x) = 9x^2 - 8x + 5x.$$

Identifier l'erreur et corriger le calcul.

23 *** [RAI, COM]

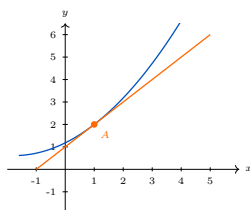
Pour déterminer une tangente en $a = 2$, Lina calcule seulement $f'(2)$ et écrit

$$y = f'(2)x.$$

Expliquer pourquoi la méthode est incomplète. Donner la formule correcte et les deux contrôles à effectuer.

24 ** [REP, RAI]

La courbe de f et une tangente au point A sont représentées. Lire graphiquement $f(1)$ et $f'(1)$, puis proposer l'équation réduite de la tangente.



25 ** [CAL, RAI, COM]

On considère

$$P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5.$$

1. Calculer $P'(x)$.
2. Vérifier que $P'(2) = 0$.
3. Déterminer la tangente en $x = 2$.
4. Vérifier que le point de contact appartient à la droite obtenue.

D — Synthèse et problèmes de gestion

26 *** [MOD, CAL, COM]

Une entreprise modélise son coût total, en milliers d'euros, par

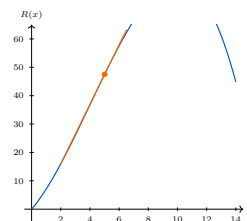
$$C(x) = 0,03x^3 - 0,9x^2 + 14x + 60,$$

où x est une quantité en centaines d'articles.

1. Calculer $C'(x)$.
2. Calculer $C(10)$ et $C'(10)$.
3. Déterminer l'équation de la tangente en $x = 10$.
4. Interpréter $C'(10)$ dans le contexte.

27 *** [MOD, REP, CAL, COM]

La recette, en milliers d'euros, est modélisée par $R(x) = -0,1x^3 + 1,2x^2 + 6x$. Calculer la fonction dérivée, puis l'équation de la tangente en $x = 5$. Comparer la pente calculée avec l'allure de la tangente représentée.



28 *** [CH, MOD, RAI, COM]

Créer un problème de gestion utilisant un polynôme de degré 3. Le problème doit demander :

1. le calcul de la fonction dérivée ;
2. un nombre dérivé en un point choisi ;
3. l'équation de la tangente en ce point ;
4. une interprétation avec des unités ;
5. un contrôle graphique ou numérique.

Préciser clairement le domaine pertinent du modèle.

Compétences travaillées. CH MOD REP RAI CAL COM.