

TD S17 — Nombre dérivé : sécantes, tangentes et interprétation

Première STMG — Mathématiques

Objectif. Calculer et interpréter un taux de variation, relier une sécante à une variation moyenne, comprendre la tangente comme position limite, lire ou estimer un nombre dérivé et l'interpréter comme vitesse instantanée ou coût marginal.

Conseils. Pour une pente, conserver le même ordre au numérateur et au dénominateur. Sur un graphique, choisir deux points lisibles sur la droite étudiée. Toujours préciser l'unité dans une interprétation.

Vigilance. Le nombre dérivé est la pente de la tangente, pas l'ordonnée du point de contact. Aucune définition formelle de limite n'est attendue.

Parcours conseillé. Classe : 1 à 6, 8 à 12, 14, 16, 17, 20, 24 Maison : 7, 13, 15, 18, 19, 21, 22, 25 Approfondir : 23, 26 à 28

A — Réactivation : pentes et variations moyennes

① ★ [CAL]

Calculer le coefficient directeur de la droite passant par :

$$A(1; 3) \text{ et } B(5; 11), \quad C(-2; 4) \text{ et } D(2; -2).$$

② ★ [CAL, COM]

On donne $f(2) = 7$ et $f(6) = 19$. Calculer le taux de variation de f entre 2 et 6, puis rédiger une phrase d'interprétation sans contexte.

③ ★ [CAL]

Calculer les taux de variation de $f(x) = x^2$:

entre 1 et 3, entre 2 et 5.

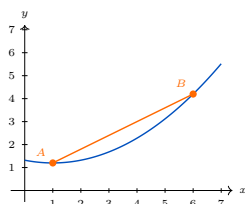
④ ★ [REP, COM]

Préciser l'unité du taux de variation :

- coût en euros en fonction d'une quantité d'articles ;
- distance en kilomètres en fonction du temps en heures ;
- chiffre d'affaires en milliers d'euros en fonction du mois.

⑤ ★ [REP, CAL]

La droite (AB) est une sécante à la courbe. Lire les coordonnées de A et B , puis calculer son coefficient directeur.



⑥ ★ [CAL, RAI]

Un indicateur passe de 240 à 300 entre les rangs 4 et 7. Calculer son taux de variation moyen par rang.

⑦ ★★ [RAI, COM]

Un élève calcule

$$\frac{f(5) - f(2)}{2 - 5}.$$

Expliquer l'erreur d'ordre et proposer deux écritures correctes du même taux de variation.

B — Des sécantes au nombre dérivé

⑧ ★ [CAL]

Pour $f(x) = x^2$, calculer le taux de variation entre 2 et :

3, 2,5, 2,1, 2,01.

Vers quelle valeur les résultats semblent-ils se rapprocher ?

⑨ ★ [CAL, RAI]

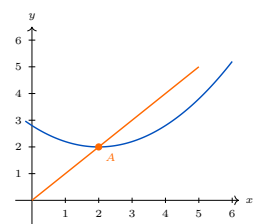
Pour $g(x) = 3x^2 + 2$, compléter :

h	1	0,5	0,1	0,01
$\frac{g(1+h) - g(1)}{h}$				

Conjecturer $g'(1)$.

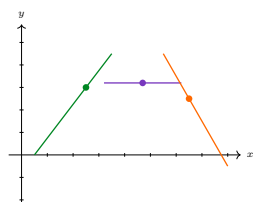
⑩ ★ [REP, CAL]

La droite orange est la tangente à la courbe au point A . En utilisant deux points de la tangente, lire $f'(2)$.



⑪ ★★ [REP, CAL]

Pour chacune des trois tangentes, déterminer le signe du nombre dérivé, puis calculer sa valeur à l'aide du quadrillage.



⑫ ★ [REP, RAI]

Tracer dans un repère une droite passant par $A(2; 3)$ et de coefficient directeur 2. Cette droite représente une tangente : donner la valeur du nombre dérivé correspondant.

13 ** [REP, RAI]

Tracer une tangente de coefficient directeur $-\frac{1}{2}$ au point $B(4; 2)$. Indiquer une construction possible à l'aide d'un déplacement horizontal de 2 unités.

14 * [REP, COM]

Une tangente à la courbe de f au point d'abscisse 5 est horizontale. Donner $f'(5)$ et expliquer ce que cela signifie graphiquement.

15 ** [CAL, REP]

La tangente en $A(3; 7)$ passe aussi par le point $P(5; 1)$. Calculer $f'(3)$.

16 ** [MOD, CAL, COM]

Le coût total C , en euros, est étudié au voisinage de 80 articles. La tangente au point d'abscisse 80 monte de 48 euros lorsque la quantité augmente de 2 articles. Calculer $C'(80)$ et l'interpréter.

17 * [MOD, COM]

La distance $d(t)$, en kilomètres, dépend du temps t , en heures. Interpréter :

$$d'(1,5) = 72.$$

C — Analyser, choisir et corriger

18 ** [RAI, COM]

Un élève affirme : « Le taux de variation entre 2 et 6 est la vitesse instantanée au temps 2. » Expliquer la confusion entre variation moyenne et variation instantanée.

19 ** [RAI, COM]

Au point $A(4; 9)$, une tangente a pour pente 3. Mina écrit $f'(4) = 9$. Identifier l'erreur et donner les deux informations représentées par 9 et 3.

20 * [CAL, RAI]

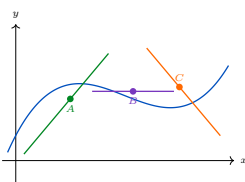
On donne :

h	2	1	0,5	0,1
$\frac{f(3+h) - f(3)}{h}$	7,6	7,3	7,15	7,03

Estimer $f'(3)$ et justifier le choix.

21 ** [REP, RAI]

La courbe possède trois tangentes aux points A , B et C . Classer les nombres dérivés $f'(a)$, $f'(b)$ et $f'(c)$ du plus petit au plus grand.



22 ** [REP, RAI]

Au point A , la tangente descend de 9 unités lorsque x augmente de 3. Au point B , elle descend de 4 unités lorsque x augmente de 2. Comparer les deux nombres dérivés et interpréter la tangente la plus pentue.

23 *** [MOD, RAI, COM]

Un indicateur social $I(t)$ est exprimé en points et t en années. On sait que $I(4) = 63$ et $I'(4) = -1,8$.

1. Distinguer la valeur de l'indicateur et sa variation instantanée.
2. Donner les unités des deux nombres.
3. Expliquer ce que suggère localement le signe négatif.

24 ** [MOD, CAL, COM]

Le bénéfice $B(x)$, en milliers d'euros, dépend d'une quantité x , en centaines d'articles. Au point d'abscisse 6, la tangente monte de 1,5 unité verticale pour 0,5 unité horizontale. Calculer $B'(6)$ et interpréter soigneusement les unités.

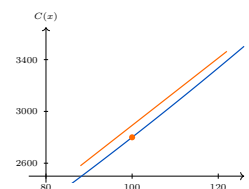
25 ** [CH, RAI, COM]

Un tableau de valeurs permet d'estimer $f'(2)$. Proposer quatre valeurs de x de plus en plus proches de 2, indiquer les taux de variation à calculer et expliquer comment reconnaître une stabilisation.

D — Synthèse et problèmes contextualisés

26 *** [MOD, CAL, REP, COM]

Le coût total, en euros, d'une production est donné par $C(x) = 0,04x^2 + 18x + 600$. La figure montre la courbe près de $x = 100$. Calculer les taux de variation entre 100 et 120, puis entre 100 et 101. Estimer $C'(100)$ et interpréter ce nombre comme coût marginal.



27 *** [MOD, CAL, RAI, COM]

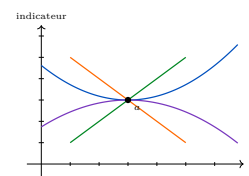
La distance parcourue par un véhicule est donnée dans le tableau :

t (h)	2	2,2	2,4	2,5	2,6	2,8
$d(t)$ (km)	112	126,8	142,4	150,5	158,8	176

1. Calculer les vitesses moyennes entre 2,5 h et 2,8 h, puis entre 2,5 h et 2,6 h.
2. Estimer la vitesse instantanée à 2,5 h.
3. Expliquer pourquoi l'estimation reste approximative.

28 *** [MOD, REP, RAI, COM]

Deux indicateurs F et G ont la même valeur au rang a , mais leurs tangentes sont différentes. Lire les deux pentes, comparer les évolutions locales et rédiger une recommandation à un décideur qui ne regarderait que la valeur commune.



Compétences travaillées. CH MOD REP RAI CAL COM.