

Objectif. Réactiver le produit nul et le signe d'un facteur, lire et vérifier des racines, factoriser dans des cas simples, construire un tableau de signes et interpréter les résultats dans des situations de gestion.

Conseils. La calculatrice est utile pour vérifier ou explorer, mais les calculs simples doivent être maîtrisés sans elle. Pour une équation ou une inéquation, rédiger par équivalences et conclure avec $\mathcal{S}$.

Vigilance. On n'utilise pas de formule générale de résolution du second degré : on exploite une racine connue, une forme factorisée, un graphique ou un balayage.

Parcours conseillé. Classe : 1 à 5, 8 à 10, 13, 14, 16, 17, 24 **Maison :** 6, 7, 11, 12, 15, 18, 19, 20 **Approfondir :** 21 à 23 et 25 à 28

A — Réactivation et automatismes

1★[CAL]

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$(2x - 6)(x + 5) = 0, \quad (4x + 1)(3 - x) = 0.$$

2★[CAL]

Indiquer le signe de chaque expression selon x : $x - 3$, $x + 2$, $-2(x - 5)$, $4 - 3x$.

3★[CAL]

Développer et réduire :

$$2(x - 1)(x + 4), \quad -(x - 3)(x + 2), \quad 3(x + 1)^2.$$

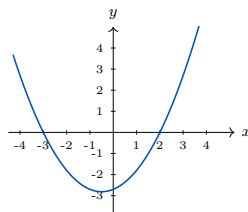
4★[CAL]

Factoriser :

$$3x(x - 4) + 2(x - 4), \quad x^2 - 9, \quad 5x^2 - 15x.$$

5★[REP]

La courbe ci-contre représente une fonction f . Lire les solutions de $f(x) = 0$, puis les intervalles où $f(x) > 0$.



6★[REP, CAL]

Compléter :

$$x < -2 \iff x \in \dots, \quad 1 \leq x < 5 \iff x \in \dots$$

Puis représenter ces intervalles sur une droite graduée.

7★[REP, RAI]

Une parabole est tournée vers le bas et coupe l'axe des abscisses en -1 et 6 . Sans calcul, donner le signe de la fonction sur $\mathbb{R}$.

B — Applications directes

8★[CAL]

Donner les racines :

a) $A(x) = 5(x - 4)(x + 1)$,

b) $B(x) = -2(x + 3)(x - 7)$,

c) $C(x) = x(3x - 12)$,

d) $D(x) = 4(x - 2)^2$.

9★[CAL, COM]

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$3(x - 5)(x + 2) = 0,$$

$$-4(x + 1)(2x - 3) = 0.$$

Conclure avec l'ensemble $\mathcal{S}$.

10★[CAL, RAI]

Vérifier que le nombre indiqué est une racine :

$$P(x) = x^2 - 5x + 6, \quad \alpha = 2,$$

$$Q(x) = 2x^2 + x - 6, \quad \alpha = -2.$$

La seconde valeur obtenue peut-elle être devinée à partir d'une factorisation simple ?

11★★[CAL, RAI]

On sait que 3 est une racine de $P(x) = x^2 - 5x + 6$. Chercher d tel que $P(x) = (x - 3)(x + d)$, puis factoriser P .

12★★[CAL, RAI]

On sait que -1 est une racine de $Q(x) = 2x^2 - 6x - 8$. Chercher d tel que $Q(x) = (x + 1)(2x + d)$, puis donner les deux racines.

13★★[CAL, REP]

Étudier le signe de $F(x) = 2(x + 3)(x - 1)$ à l'aide d'un tableau de signes, puis résoudre $F(x) \leq 0$.

x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$
$x + 3$				
$x - 1$				
$F(x)$				

14 ** [CAL, REP]

Construire le tableau de signes de $G(x) = -3(x-2)(x-6)$, puis résoudre $G(x) > 0$.

15 ** [REP, RAI]

Associer chaque expression à la bonne description :

$$f(x) = 2(x+1)(x-4), \quad g(x) = -2(x+1)(x-4).$$

Descriptions : parabole tournée vers le haut / vers le bas ; positive entre les racines / positive à l'extérieur.

16 ** [MOD, CAL, COM]

Le résultat mensuel d'un kiosque, en centaines d'euros, est $R(x) = -0,2(x-10)(x-50)$, où x est le nombre de commandes. Déterminer les seuils d'équilibre puis l'intervalle de rentabilité.

C — Approfondissement, choix et erreurs

17 ** [REP, RAI]

Trois fonctions ont les mêmes racines -2 et 5 :

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+2)(x-5), \\ g(x) &= -3(x+2)(x-5), \\ h(x) &= 0,2(x+2)(x-5). \end{aligned}$$

Comparer leurs signes et expliquer l'effet du coefficient placé devant le produit.

18 ** [RAI, COM]

Un élève affirme : « $P(x) = -2(x-1)(x-7)$ est négatif entre 1 et 7, car il y a un signe moins devant. » Identifier l'erreur, corriger l'affirmation et proposer une vérification numérique.

19 ** [CAL, RAI]

On considère $P(x) = 3x^2 - 15x + 18$.

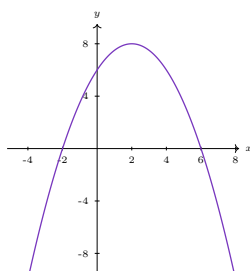
- Vérifier que 2 est une racine.
- Chercher une factorisation sous la forme $P(x) = 3(x-2)(x-\beta)$.
- En déduire le signe de P .

20 ** [CAL, RAI]

Le polynôme $Q(x) = x^2 + kx - 12$ admet 3 comme racine. Déterminer k , factoriser Q , puis donner sa seconde racine.

21 ** [REP, RAI, COM]

La courbe représente $H(x) = -0,5(x+2)(x-6)$. Lire graphiquement les racines et le signe, puis retrouver ces résultats par le calcul.



22 ** [RAI, COM]

Pour résoudre $2(x-1)(x-8) \leq 0$, Léa veut développer tandis que Sami veut utiliser directement la forme

factorisée. Comparer les deux démarches et expliquer laquelle est la plus efficace.

23 ** [CH, REP, CAL]

On cherche une solution positive de $x^2 - 5x - 1 = 0$, sans factorisation immédiate.

- Calculer la fonction pour $x = 5$ et $x = 6$.
- Avec un pas de 0,1, calculer les valeurs à partir de 5 jusqu'au premier changement de signe.
- Donner un encadrement de la solution d'amplitude 0,1.

24 ** [MOD, RAI, COM]

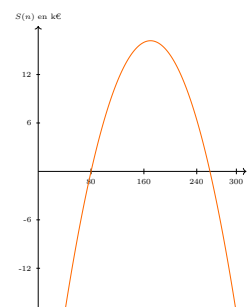
Une entreprise fabrique entre 0 et 120 objets par jour. Sa marge totale, en euros, est $M(x) = -0,5(x-20)(x-100)$. Répondre aux questions suivantes en tenant compte du domaine :

- Quand la marge est-elle nulle ?
- Pour quelles productions est-elle positive ?
- Que signifie le résultat pour le responsable ?

D — Synthèse et problèmes ouverts

25 *** [MOD, CH, COM]

Une association organise une soirée. Le résultat financier, en euros, est modélisé par $S(n) = -2(n-80)(n-260)$, pour $0 \leq n \leq 300$, où n est le nombre d'entrées. Rédiger une note courte indiquant les seuils d'équilibre et la zone de bénéfice. Vérifier graphiquement la cohérence de la réponse.



26 *** [CH, MOD, RAI, COM]

Un commerçant souhaite créer un espace rectangulaire dont les côtés mesurent $x+1$ mètres et $x+4$ mètres. L'aire doit être 60 m^2 . Trouver les dimensions possibles sans utiliser de formule générale. Toute démarche cohérente est acceptée ; justifier le rejet éventuel d'une solution.

27 *** [CH, MOD, RAI, COM]

Deux stratégies commerciales ont des bénéfices B_A et B_B . On sait que

$$B_A(x) - B_B(x) = 0,03(x-30)(x-90),$$

pour $x \in [0; 120]$, où x désigne le nombre de contrats. Déterminer quelle stratégie est la plus avantageuse selon x , puis rédiger une recommandation argumentée.

28 *** [CH, RAI, COM]

Inventer une situation réaliste dans laquelle une grandeur est modélisée par $P(x) = -a(x-r_1)(x-r_2)$, avec $a > 0$ et $0 < r_1 < r_2$. Préciser le sens de x , des deux racines et du signe de P , puis proposer une question que l'on pourrait poser à un élève.