

TD N06 — Fonctions du second degré : paraboles et formes simples

Première STMG — Mathématiques

Objectif. Reconnaître et construire des paraboles, identifier orientation, axe, sommet et variations, exploiter des formes simples et interpréter un extremum dans un contexte de gestion.

Conseils. Commencer par observer le signe du coefficient de x^2 , puis l'axe et le sommet. Utiliser la symétrie avant de multiplier les calculs.

Vigilance. Aucun discriminant ni formule générale du sommet. La calculatrice sert à produire des tableaux ou des courbes, pas à remplacer l'interprétation.

Parcours conseillé. Classe : 1 à 18, 26 Maison : 19 à 23, 27 Approfondir : 24, 25, 28 à 30

A — Réactivation et automatismes

1★[CAL]

Calculer :

$$(-3)^2, \quad (-2)^2, \quad 0^2, \quad 2^2, \quad 3^2.$$

2★[CAL]

Pour $f(x) = 2x^2$, calculer :

$$f(-2), \quad f(-1), \quad f(0), \quad f(1), \quad f(2).$$

Que remarque-t-on ?

3★[REP]

Parmi les fonctions suivantes, lesquelles sont du second degré ?

$$3x^2 - 5x + 1; \quad 4x - 7; \quad -2x^2; \quad x^3 + 1.$$

4★[REP]

Donner l'orientation de la parabole associée à :

$$2x^2 - 3; \quad -5x^2 + 4; \quad 0,2x^2; \quad -x^2 - 7.$$

5★[REP]

Donner l'axe et le sommet de :

$$3x^2; \quad -2x^2 + 5; \quad x^2 - 4.$$

6★[REP]

Compléter par symétrie si l'axe est $x = 4$:

$$f(1) = f(\dots), \quad f(3) = f(\dots), \quad f(4) = f(\dots).$$

7★[CAL, REP]

Pour $g(x) = -(x - 3)^2 + 6$, calculer $g(1)$, $g(3)$ et $g(5)$. Identifier le sommet.

8★[RAI]

Une parabole possède un maximum. Quel est le signe du coefficient de x^2 ? Justifier en une phrase.

B — Applications directes

9★[REP, COM]

Pour $f(x) = 4x^2 - 2$, donner :

a) l'orientation ;

b) l'axe ;

c) le sommet ;

d) le minimum ou le maximum.

10★[REP, COM]

Même travail pour $g(x) = -3x^2 + 12$.

11★[CAL, REP]

Compléter le tableau de $h(x) = x^2 - 1$.

x	-2	-1	0	1	2
$h(x)$	...	...	...	...	...

Tracer la parabole.

12★[REP]

Pour $p(x) = 2(x - 5)^2 - 3$, lire directement l'axe, le sommet et le minimum.

13★[REP]

Pour $q(x) = -4(x + 2)^2 + 7$, lire directement l'axe, le sommet et le maximum.

14★★[CAL, REP]

Pour $r(x) = (x - 3)^2 - 4$:

a) calculer $r(1)$, $r(2)$, $r(3)$, $r(4)$, $r(5)$;

b) compléter le tableau de variations ;

c) tracer une courbe.

15★★[REP, CAL]

Pour $s(x) = -2(x - 1)(x - 7)$:

a) déterminer l'axe de symétrie ;

b) calculer l'image de l'abscisse de l'axe ;

c) en déduire le sommet et l'extremum.

16★★[REP, CAL]

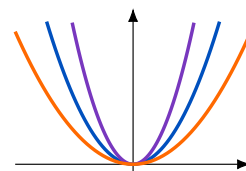
Pour $t(x) = 3(x + 4)(x - 2)$, déterminer l'axe et les coordonnées du sommet.

17★★[REP]

Associer chacune des trois courbes à une expression :

$$x^2, \quad 2x^2, \quad 0,5x^2.$$

Justifier par l'ouverture.

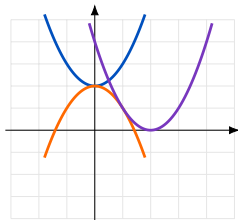


18 ** [REP]

Associer les courbes aux expressions :

$$x^2 + 2, \quad -x^2 + 2, \quad (x - 2)^2.$$

Identifier chaque sommet.



C — Choisir, expliquer et raisonner

19 ** [RAI, COM]

Un élève affirme que $f(x) = -2(x - 5)^2 + 8$ a pour sommet $S(-5; 8)$. Corriger et expliquer l'erreur.

20 ** [RAI, COM]

Un élève affirme : « puisque $a = 3 > 0$, le sommet de $3x^2 - 12x + 7$ est $(0; 7)$ ». Expliquer pourquoi la conclusion est fausse.

21 ** [REP, RAI]

Une parabole a pour axe $x = 3$ et vérifie $f(1) = 5$. Donner une autre image connue sans calcul.

22 ** [CH, REP]

Construire une parabole ayant :

— pour sommet $S(2; -3)$;

— un minimum ;

— le point $A(3; -1)$.

Proposer ensuite une expression simple compatible.

23 ** [RAI, CAL]

Vérifier que

$$x^2 - 8x + 11 = (x - 4)^2 - 5.$$

En déduire l'axe, le sommet et les variations.

24 ** [CH, REP, COM]

Inventer une expression de la forme $a(x - h)^2 + k$ dont la parabole :

— a pour sommet $S(-2; 6)$;

— possède un maximum ;

— passe par le point d'abscisse 0 et d'ordonnée 2.

25 ** [RAI, REP]

Une parabole est tournée vers le bas, coupe l'axe des abscisses en 2 et 10, et son sommet a pour ordonnée 16.

a) Déterminer l'axe et le sommet.

b) Esquisser la courbe.

c) Proposer une forme factorisée simple, puis vérifier le sommet.

D — Synthèse et problèmes en contexte

26 *** [MOD, REP, COM]

Prix optimal. Le bénéfice mensuel, en milliers d'euros, est

$$B(x) = -2(x - 5)^2 + 18,$$

où x est le prix, en dizaines d'euros.

a) Identifier l'axe et le sommet.

b) Donner le bénéfice maximal et le prix correspondant.

c) Calculer $B(3)$, puis utiliser la symétrie pour obtenir une autre valeur.

d) Construire le tableau de variations sur $[2; 8]$.

e) Interpréter le fait que le bénéfice diminue lorsque $x > 5$.

27 *** [MOD, CAL, REP]

Recette selon le prix. Une recette, en centaines d'euros, est modélisée par

$$R(x) = -x(x - 12), \quad 0 \leq x \leq 12.$$

a) Déterminer l'axe de symétrie.

b) Calculer la recette au niveau de l'axe.

c) En déduire le sommet et la recette maximale.

d) Construire un tableau de valeurs symétriques.

e) Tracer la parabole et interpréter le maximum.

28 *** [MOD, RAI, COM]

Deux écritures d'un même bénéfice. On donne

$$P(x) = -2(x - 3)(x - 9).$$

a) Déterminer l'axe et calculer $P(6)$.

b) Vérifier par développement que

$$P(x) = -2(x - 6)^2 + 18.$$

c) Expliquer ce que chaque forme permet de lire facilement.

d) Décrire les variations sans utiliser de formule générale du sommet.

29 *** [CH, MOD, CAL, COM]

Budget publicitaire. Le gain supplémentaire, en milliers d'euros, est modélisé par

$$G(x) = -a(x - 5)^2 + 20,$$

où x est le budget publicitaire, en milliers d'euros. On sait que $G(3) = 12$.

a) Déterminer le nombre a .

b) Donner le budget optimal et le gain maximal.

c) Calculer $G(7)$ sans nouveau développement.

d) Construire le tableau de variations sur $[0; 10]$.

30 *** [MOD, REP, RAI, COM]

Tableur et conjecture. On étudie

$$f(x) = -0,5x^2 + 4x + 2, \quad 0 \leq x \leq 8.$$

a) Dans un tableur, saisir les entiers de 0 à 8 en colonne A.

b) Écrire en B2 une formule calculant $f(x)$, puis la recopier.

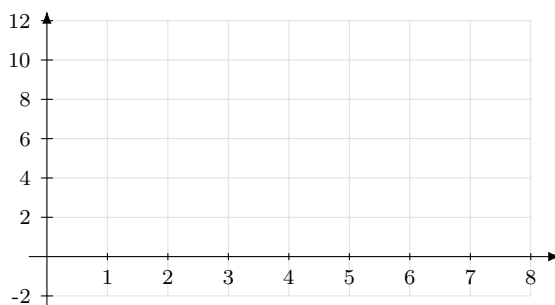
c) Repérer deux paires de valeurs ayant la même image et conjecturer l'axe.

d) Donner le sommet et le maximum à partir du tableau.

e) Représenter la courbe et vérifier les conjectures.

f) Expliquer pourquoi cette méthode ne constitue pas une formule générale.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$									



Compétences travaillées. CH MOD REP RAI CAL COM.