

TD N05 — Taux de variation et fonctions monotones

Première STMG — Mathématiques

Objectif. Calculer et interpréter un taux de variation, le relier à une pente de sécante, reconnaître la monotonie d'une fonction et comparer des rythmes moyens dans des contextes STMG.

Conseils. Écrire la formule avant de remplacer les valeurs. Respecter l'ordre dans les deux différences. Préciser l'unité. Un calcul sur un seul intervalle ne suffit pas toujours pour conclure sur toute une fonction.

Outils. Partie A sans calculatrice. Calculatrice autorisée ensuite pour les valeurs décimales.

Parcours conseillé. Classe : 1 à 18, 26 Maison : 19 à 23, 27 Approfondir : 24, 25, 28 à 30

A — Réactivation et automatismes

① ★ [CAL]

Calculer mentalement :

$$\frac{18-6}{7-3}; \quad \frac{35-50}{8-3}; \quad \frac{24-24}{9-1}.$$

② ★ [CAL]

Pour $f(x) = 2x + 5$, calculer $f(1)$, $f(4)$, puis

$$\frac{f(4) - f(1)}{4 - 1}.$$

③ ★ [REP]

Compléter.

a	b	$f(a)$	$f(b)$
2	7	10	30
-1	3	8	0
4	9	12	12

Calculer le taux de variation sur chaque ligne.

④ ★ [RAI]

Sans calculer exactement, donner le signe du taux entre $a < b$:

a) $f(a) = 12$, $f(b) = 20$;

b) $f(a) = 7$, $f(b) = -2$;

c) $f(a) = 5$, $f(b) = 5$.

⑤ ★ [REP, RAI]

Associer chaque pente à la description correcte :

$$4; \quad -2; \quad 0.$$

Sécante montante, descendante ou horizontale.

⑥ ★ [CAL]

Une distance passe de 40 km à 130 km entre 9 h et 11 h. Calculer la vitesse moyenne.

⑦ ★ [RAI, COM]

Distinguer les deux calculs :

$$\frac{120 - 100}{100} \quad \text{et} \quad \frac{120 - 100}{8 - 4}.$$

Indiquer lequel est un taux d'évolution et lequel est un taux de variation.

⑧ ★ [REP]

Une fonction est décroissante sur $[1; 6]$. Pour $a < b$ dans cet intervalle, compléter :

$$f(a) \dots f(b), \quad \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \dots 0.$$

B — Calculs et lectures directes

⑨ ★ [CAL, COM]

Pour $f(x) = 3x - 7$, calculer les taux de variation entre :

$$1 \text{ et } 5; \quad -2 \text{ et } 4.$$

Que remarque-t-on ?

⑩ ★ [CAL, RAI]

Pour $g(x) = -4x + 9$, calculer le taux entre 0 et 3, puis entre 2 et 8. En déduire le sens de variation de g .

⑪ ★ [CAL]

On considère $h(x) = x^2$. Calculer les taux entre :

$$0 \text{ et } 2; \quad 2 \text{ et } 5; \quad -3 \text{ et } -1.$$

Comparer leurs signes.

⑫ ★ [CAL, COM]

Une grandeur vaut 80 pour $x = 2$ et 116 pour $x = 8$.

a) Calculer son taux de variation.

b) Interpréter si la grandeur est un coût en euros et x un nombre de clients.

⑬ ★ [REP, CAL]

Le tableau donne un indicateur économique.

t	0	2	5	9
$I(t)$	100	112	127	139

Calculer les taux moyens sur chaque intervalle successif.

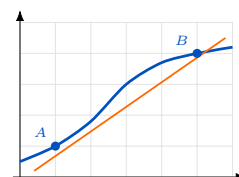
⑭ ★★ [REP, CAL]

La droite (AB) est une sécante à la courbe.

a) Lire les coordonnées de A et B .

b) Calculer la pente de (AB) .

c) Interpréter son signe.



15 ** [REP, RAI]

La courbe représente une fonction f sur $[0; 6]$.

- Donner les intervalles de croissance et de décroissance.
- Donner le signe du taux entre 1 et 3, puis entre 4 et 6.
- Le taux entre 1 et 5 est-il nécessairement positif ?



16 * [REP, RAI]

On sait que f est croissante sur $[-2; 4]$. Ranger dans l'ordre :

$$f(-2), \quad f(0), \quad f(3), \quad f(4).$$

17 * [REP, RAI]

On sait que g est décroissante sur $[1; 10]$. Comparer :

$$g(2) \text{ et } g(7), \quad g(5) \text{ et } g(9).$$

18 ** [CAL, REP]

Pour $p(x) = 5 - 2x$:

- calculer le taux entre deux nombres quelconques $a \neq b$;
- en déduire le sens de variation ;
- donner la pente de toute sécante.

C — Choisir, expliquer et raisonner

19 ** [RAI, COM]

Un élève calcule

$$\frac{f(5) - f(2)}{2 - 5}.$$

Expliquer l'erreur d'ordre et corriger la formule.

20 ** [RAI, COM]

Un élève affirme : « le taux entre 2 et 5 est positif, donc la fonction est croissante sur $\mathbb{R}$ ». Expliquer pourquoi la conclusion est injustifiée.

21 ** [RAI, CAL]

Deux indicateurs augmentent :

$$A : 40 \rightarrow 70 \text{ lorsque } x : 1 \rightarrow 6,$$

$$B : 100 \rightarrow 124 \text{ lorsque } x : 2 \rightarrow 5.$$

Lequel augmente le plus vite en moyenne ?

22 ** [REP, RAI]

Construire une courbe possible d'une fonction :

- croissante sur $[-3; 1]$;
- constante sur $[1; 3]$;
- décroissante sur $[3; 6]$.

Préciser le signe des taux sur chaque intervalle.

23 ** [CH, RAI]

Trouver une fonction affine :

- de taux constant 4 et telle que $f(0) = 7$;
- de taux constant -3 et telle que $g(2) = 5$.

24 ** [CH, REP, COM]

Inventer un tableau de cinq valeurs représentant une fonction croissante mais dont les taux successifs ne sont pas constants. Calculer ces taux.

25 ** [RAI, COM]

Une fonction f vérifie, pour tous $a < b$ dans $[0; 10]$,

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq 0.$$

Que peut-on affirmer ? Rédiger une justification complète.

D — Synthèse et problèmes en contexte

26 *** [MOD, CAL, COM]

Coût de préparation. Le tableau donne le coût journalier $C(x)$, en euros, pour x commandes.

x	100	200	350	500	650
$C(x)$	700	1 000	1 600	2 350	3 250

- Calculer les taux de variation successifs.
- Interpréter chaque taux en contexte.
- Le coût est-il croissant sur les données observées ?
- Le rythme d'augmentation est-il constant ?
- Quel intervalle présente l'augmentation moyenne la plus forte ?

27 *** [MOD, CAL, COM]

Trajet de livraison. La distance $d(t)$, en kilomètres, parcourue depuis 8 h est donnée ci-dessous.

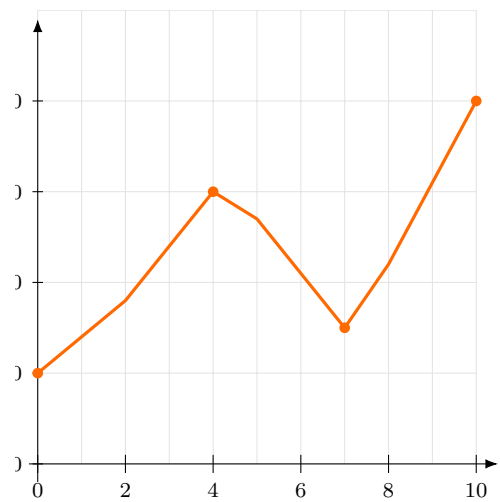
t (h)	8	9	10	11	12
$d(t)$	0	55	95	150	180

- Calculer la vitesse moyenne sur chaque heure.
- Calculer la vitesse moyenne entre 8 h et 12 h.
- La distance est-elle une fonction croissante du temps ?
- Expliquer pourquoi la vitesse moyenne globale ne décrit pas chaque heure.

28 *** [MOD, REP, RAI]

Indice de confiance. Un indice $I(t)$ est observé sur dix mois.

- Lire $I(0)$, $I(4)$, $I(7)$ et $I(10)$.
- Calculer les taux moyens sur $[0; 4]$, $[4; 7]$ et $[7; 10]$.
- Décrire les variations.
- Sur quelle période l'indice augmente-t-il le plus vite en moyenne ?
- Le taux global sur $[0; 10]$ suffit-il à décrire toute l'évolution ?



29 *** [CH, MOD, REP, COM]

Comparer deux offres commerciales. Les recettes, en milliers d'euros, de deux stratégies A et B sont observées selon le budget publicitaire x , en milliers d'euros.

x	2	5	8	12
$A(x)$	20	35	47	59
$B(x)$	28	37	43	48

- Calculer les taux successifs pour chaque stratégie.
- Comparer les rythmes moyens.
- Les deux fonctions semblent-elles croissantes ?
- Quelle stratégie profite le plus d'une hausse du budget entre 8 et 12 ?
- Rédiger une recommandation prudente à partir des seules données.

30 *** [CH, MOD, REP, RAI, COM]

Construire et analyser un modèle. Choisir une situation STMG où une grandeur dépend d'une autre.

- Définir les deux grandeurs et leurs unités.
- Proposer un tableau d'au moins cinq valeurs.
- Calculer les taux de variation successifs.
- Représenter les données dans un repère et tracer les sécantes utiles.
- Décrire la monotonie observée et interpréter les taux.
- Expliquer une limite du modèle ou des données.

Compétences travaillées. CH MOD REP RAI CAL COM.