

TD N03 — Calcul algébrique, équations et signes

Première STMG — Mathématiques

Objectif. Transformer des expressions, résoudre des équations produit nul, construire des tableaux de signes et interpréter les résultats dans des situations de gestion.

Conseils. Identifier la structure avant de calculer. Dans une équation, écrire des équivalences et conclure par $\mathcal{S}$. Pour un signe, repérer d'abord les zéros.

Outils. Partie A sans calculatrice. Calculatrice inutile dans l'ensemble du TD.

Parcours conseillé. Classe : 1 à 18, 20, 26 Maison : 19, 21 à 24, 27 Approfondir : 25, 28 à 30

A — Réactivation et automatismes

1★[CAL]

Réduire :

$$3x + 7x; \quad 5x - 2 + 4x + 9; \quad 6x^2 - 2x^2 + 3x.$$

2★[CAL]

Développer :

$$4(x + 3); \quad -2(3x - 5); \quad 5x(2x - 1).$$

3★[CAL]

Développer et réduire :

$$3(2x - 1) + 5x; \quad 7 - 2(x + 4); \quad 4x(x - 3) + 2x^2.$$

4★[CAL]

Factoriser par le facteur commun indiqué :

$$6x + 18 \text{ (6)}; \quad 5x^2 - 15x \text{ (5x)}; \quad 4x(x + 2) - 3(x + 2) \text{ (x + 2)}.$$

5★[RAI, CAL]

Associer chaque expression à une forme équivalente.

$$\begin{array}{l|l} A = 3(x + 4) & 3x + 12 \\ B = 5x - 10 & 5(x - 2) \\ C = 2x(x + 3) & 2x^2 + 6x \end{array}$$

6★[CAL]

Calculer pour $x = -2$, puis pour $x = 3$:

$$A(x) = 2x - 5, \quad B(x) = x(x + 4).$$

7★[CAL, RAI]

Compléter sans résoudre longuement :

$$(x - 4)(x + 2) = 0 \iff x = \dots \text{ ou } x = \dots$$

8★[REP, CAL]

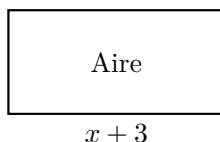
Le rectangle a pour dimensions $x + 3$ et 4.

a) Écrire son aire sous forme factorisée.

b) Développer cette expression.

c) Vérifier pour $x = 2$.

4



B — Applications directes

9★[CAL, COM]

Résoudre dans $\mathbb{R}$, puis donner $\mathcal{S}$:

$$(x - 7)(x + 1) = 0.$$

10★[CAL, COM]

Résoudre :

$$(3x + 6)(2x - 5) = 0.$$

11★[CAL]

Résoudre :

$$x(4x - 12) = 0; \quad (5 - x)(x + 8) = 0.$$

12★★[RAI, CAL]

Factoriser, puis résoudre :

$$4x(x - 3) + 7(x - 3) = 0.$$

13★★[RAI, CAL]

Développer, réduire, puis résoudre :

$$2(3x - 1) - 5x = 7.$$

14★[CAL, REP]

Déterminer le zéro et le signe de :

$$3x - 9; \quad -4x - 8.$$

15★[REP, CAL]

Compléter les tableaux.

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$2x + 6$	$\dots$	0	$\dots$

x	$-\infty$	5	$+\infty$
$5 - x$	$\dots$	0	$\dots$

16★★[CAL, REP]

Étudier le signe de

$$P(x) = (x - 1)(x + 4).$$

Donner les solutions de $P(x) \geq 0$.

17 ** [CAL, REP]

Étudier le signe de

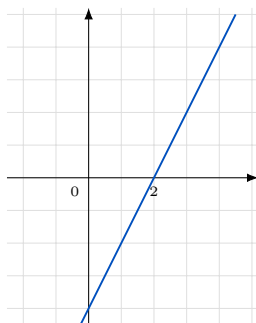
$$Q(x) = (3 - x)(x + 2).$$

Donner les solutions de $Q(x) < 0$.

18 ** [REP, RAI]

La droite représente $y = 2x - 4$.

- Lire son zéro.
- Sur quel intervalle l'expression est-elle positive ?
- Retrouver ces réponses par le calcul.



C — Approfondissement, choix et erreurs

19 ** [RAI, COM]

Un élève écrit :

$$3(x - 2) = 3x - 2.$$

Identifier l'erreur, corriger le calcul et proposer une vérification numérique.

20 ** [RAI, COM]

Un élève résout $(x - 5)(2x + 1) = 0$ en écrivant $x = 5$ et $x = -1$. Corriger sa copie et expliquer l'erreur.

21 ** [RAI, CAL]

Choisir la forme la plus utile, puis répondre.

$$A(x) = 4x(x - 2) + 3(x - 2).$$

- Calculer $A(5)$.
- Résoudre $A(x) = 0$.
- Développer $A(x)$.

22 ** [REP, RAI]

Sans calculer toutes les valeurs, compléter le signe de

$$R(x) = (x + 3)(7 - x)$$

dans le tableau.

x	$-\infty$	-3	7	$+\infty$
$x + 3$	$\dots$	0	$\dots$	$\dots$
$7 - x$	$\dots$	$\dots$	0	$\dots$
$R(x)$	$\dots$	0	0	$\dots$

23 ** [CH, RAI]

Trouver une expression factorisée qui :

- s'annule en -2 et en 5 ;
- est positive entre ces deux valeurs ;
- est négative à l'extérieur.

Vérifier avec un tableau de signes.

24 ** [RAI, CAL, COM]

Résoudre par la méthode la plus courte :

$$(x - 4)(x + 6) = 0; \quad 5x - 15 = 0,$$

puis

$$(2x + 1)(x - 3) > 0.$$

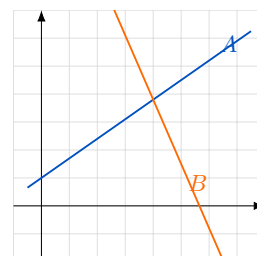
Justifier le choix de méthode dans chaque cas.

25 ** [REP, RAI]

Deux expressions A et B ont pour différence

$$A(x) - B(x) = 3x - 12.$$

- Lire graphiquement quand $A(x) > B(x)$.
- Retrouver le résultat par une étude de signe.



D — Synthèse et problèmes

26 *** [MOD, CAL, COM]

Seuil de rentabilité. Le bénéfice, en centaines d'euros, d'une opération est

$$B(x) = (x - 20)(60 - x), \quad 0 \leq x \leq 80.$$

- Calculer $B(10)$, $B(20)$, $B(40)$, $B(60)$ et $B(70)$.
- Construire le tableau de signes de B sur $[0; 80]$.
- Déterminer les quantités pour lesquelles l'opération est rentable.
- Interpréter les deux zéros.

x	0	20	60	80	
$B(x)$	$\dots$	0	$\dots$	0	$\dots$

27 *** [MOD, RAI, COM]

Deux contrats de livraison. Pour n colis, les coûts en euros de deux contrats sont

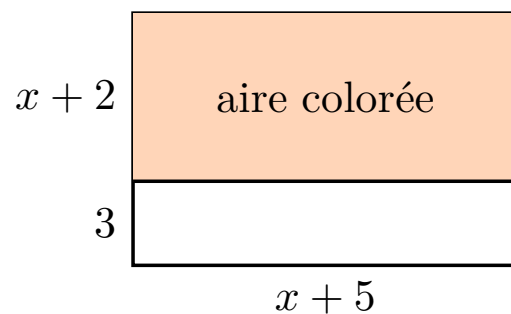
$$C_A(n) = 6n + 90, \quad C_B(n) = 10n + 30.$$

- Calculer $C_A(n) - C_B(n)$ et réduire.
- Étudier le signe de cette différence.
- À partir de combien de colis le contrat A est-il moins cher ?
- Vérifier pour deux valeurs de n situées de part et d'autre du seuil.

28 *** [MOD, REP, CAL]

Aire et factorisation. Un rectangle de dimensions $x + 5$ et $x + 2$ contient un rectangle de dimensions $x + 5$ et 3.

- Exprimer l'aire colorée sous forme d'une différence.
- Factoriser cette aire.
- Pour quelle valeur de x l'aire colorée vaut-elle zéro ?
- Interpréter cette valeur géométriquement.



29 *** [CH, RAI, COM]

Analyse d'une affirmation. Une responsable affirme :

« Si $(x - 8)(20 - x) > 0$, alors $x > 8$. »

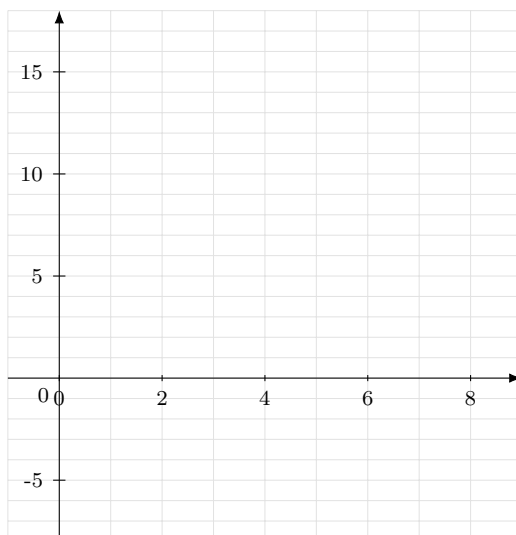
- Dire si l'affirmation est vraie.
- Construire un tableau de signes pour justifier.
- Donner une formulation complète et exacte.
- Fournir un contre-exemple à l'affirmation réciproque « si $x > 8$, alors le produit est positif ».

30 *** [CH, MOD, REP, COM]

Préparer l'étude des fonctions. On considère

$$f(x) = (x - 2)(6 - x).$$

- Déterminer les zéros et le signe de $f(x)$.
- Calculer $f(0)$, $f(2)$, $f(4)$, $f(6)$ et $f(8)$.
- Placer les points correspondants dans un repère.
- Relier prudemment les points et expliquer ce que le graphique confirme sur le signe.



Compétences travaillées. CH MOD REP RAI CAL COM.