

OBJECTIFS

- Reconnaître une épreuve de Bernoulli.
- Identifier le succès, l'échec et le paramètre p .
- Représenter des répétitions indépendantes par un arbre.
- Calculer la probabilité d'un chemin.
- Calculer des probabilités avec au plus quatre répétitions.
- Interpréter les résultats dans un contexte.

ACTIVITE DE DEPART

Une entreprise envoie une offre à trois clients choisis au hasard. Chaque client accepte l'offre avec une probabilité 0,30. On suppose les réponses indépendantes.

1. Quels sont les deux résultats possibles pour un client ?
2. Quelle est la probabilité d'un refus ?
3. Comment calculer la probabilité que les trois clients acceptent ?
4. Comment calculer la probabilité qu'exactly deux clients acceptent ?

1. Épreuve de Bernoulli

Définition (Épreuve de Bernoulli) Une **épreuve de Bernoulli** est une expérience aléatoire qui possède exactement deux issues :

- le **succès**, noté S ;
- l'**échec**, noté $\bar{S}$.

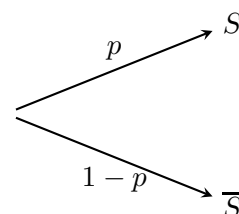
Si

$$P(S) = p,$$

alors

$$P(\bar{S}) = 1 - p.$$

Le nombre p est appelé **paramètre** de l'épreuve.



Propriété (Le succès dépend du contexte) Le mot « succès » est une convention mathématique. Il peut désigner :

- une vente réalisée ;
- un défaut détecté ;
- une réponse positive ;
- un paiement accepté.

Il ne signifie pas forcément un résultat favorable.

Exemple Pour un client :

$$S : \text{« le client accepte »}, \quad P(S) = 0,30.$$

Alors

$$P(\bar{S}) = 1 - 0,30 = 0,70.$$

Méthode Pour modéliser une situation :

1. vérifier qu'il existe deux issues seulement ;
2. choisir clairement le succès ;
3. noter sa probabilité p ;
4. calculer $1 - p$ pour l'échec.

Vigilance. Une expérience comportant trois issues ou plus n'est pas une épreuve de Bernoulli tant que l'on ne regroupe pas les issues en deux catégories.

⇒ TD S26–S27 – Partie A : reconnaître et paramétrer une épreuve de Bernoulli.

2. Répétitions identiques et indépendantes

Définition (Répétitions indépendantes) On répète une même épreuve de Bernoulli lorsque :

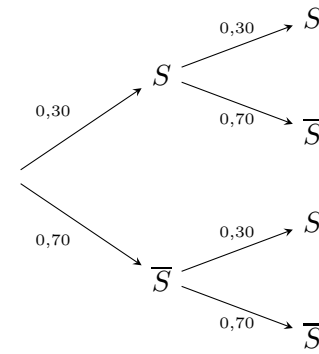
- le succès conserve la même probabilité p à chaque étape ;
- le résultat d'une étape ne modifie pas les probabilités des étapes suivantes.

Les répétitions sont alors **identiques et indépendantes**.

Propriété (Arbre de répétition) À chaque niveau de l'arbre, on retrouve les mêmes probabilités :

$$P(S) = p \quad \text{et} \quad P(\bar{S}) = 1 - p.$$

La probabilité d'un chemin est le produit des probabilités de ses branches.



Exemple Pour deux clients avec $p = 0,30$, le chemin

S puis $\bar{S}$

a pour probabilité

$$0,30 \times 0,70 = 0,21.$$

Il signifie : « le premier accepte et le second refuse ».

Vigilance. La présence du mot « plusieurs fois » ne suffit pas : l'énoncé doit permettre de supposer ou d'affirmer l'indépendance.

Propriété (Nombre de chemins) Pour n répétitions, chaque étape possède deux branches. L'arbre complet possède

$$2^n$$

chemins. Dans le programme, on se limite à $n \leq 4$.

⇒ TD S26–S27 – Partie B : arbres de deux, trois et quatre répétitions.

3. Calculer un événement à partir de l'arbre

Méthode Pour calculer la probabilité d'un événement :

1. traduire l'événement avec S et $\bar{S}$;
2. repérer tous les chemins qui le réalisent ;
3. multiplier les probabilités le long de chaque chemin ;
4. additionner les probabilités des chemins retenus.

Exemple Pour trois clients, la probabilité que les trois acceptent est

$$P(SSS) = 0,30^3 = 0,027.$$

Exemple « Exactement deux succès » correspond aux trois chemins

$$SS\bar{S}, \quad S\bar{S}S, \quad \bar{S}SS.$$

Chaque chemin a pour probabilité

$$0,30^2 \times 0,70 = 0,063.$$

Donc

$$P(\text{exactement deux succès}) = 3 \times 0,063 = 0,189.$$

Expression	Traduction
aucun succès	$\bar{S}\bar{S}\bar{S}$
trois succès	SSS
exactement un	trois chemins
exactement deux	trois chemins
au moins un	un, deux ou trois
au plus un	zéro ou un

Propriété (Événement contraire)

Pour calculer « au moins un succès », il est souvent plus court d'utiliser :

$$P(\text{au moins un } S) = 1 - P(\text{aucun } S).$$

Vigilance. « Au moins deux » signifie deux, trois, et éventuellement quatre succès selon le nombre de répétitions.

⇒ TD S26–S27 – Partie C : exactement, au moins, au plus et événement contraire.

4. Organiser un calcul et contrôler

Méthode Choisir la stratégie la plus courte.

- Un seul chemin : multiplier.
- Plusieurs chemins : calculer puis additionner.
- « Au moins un » : utiliser souvent l'événement contraire.
- Jusqu'à quatre répétitions : construire un arbre, complet ou élagué.

Exemple Une pièce est conforme avec la probabilité 0,96. Trois pièces sont contrôlées indépendamment. En notant N l'événement « au moins une pièce est non conforme » :

$$P(N) = 1 - 0,96^3 \approx 0,115.$$

Méthode Calcul automatisé d'un chemin.

```
def proba_chemin(chemin, p):  
    proba = 1  
    for issue in chemin:  
        if issue == "S":  
            proba = proba * p  
        else:  
            proba = proba * (1-p)  
    return proba
```

Pour "SSE" avec E utilisé pour l'échec, le programme multiplie deux fois p et une fois $1 - p$.
Vigilance. Cet algorithme calcule la probabilité d'un chemin. Pour un événement comportant plusieurs chemins, il faut additionner leurs probabilités.

Propriété (Contrôles de cohérence)

- une probabilité est comprise entre 0 et 1 ;
- la somme des probabilités de tous les chemins vaut 1 ;
- les probabilités des branches issues d'un même nœud valent p et $1 - p$;
- une réponse doit être interprétée dans le contexte.

A RETENIR

- Une épreuve de Bernoulli possède deux issues : succès S et échec $\bar{S}$.
- Son paramètre est $p = P(S)$ et $P(\bar{S}) = 1 - p$.
- Dans des répétitions identiques et indépendantes, les probabilités restent les mêmes à chaque niveau.
- On multiplie le long d'un chemin et on additionne les chemins qui réalisent le même événement.
- Pour « au moins un succès », l'événement contraire « aucun succès » est souvent efficace.
- On se limite aux arbres de $n \leq 4$ répétitions.

APPLICATIONS IMMEDIATES

1. Une réussite a pour probabilité 0,65. Donner la probabilité d'un échec.
2. Calculer la probabilité du chemin $S\bar{S}$ pour $p = 0,4$.
3. Combien de chemins possède un arbre à trois niveaux ?
4. Traduire « exactement deux succès sur trois ».
5. Calculer $P(\text{aucun succès})$ pour trois répétitions et $p = 0,2$.
6. Donner une méthode pour « au moins un succès ».

⇒ TD S26–S27 : arbres, répétitions indépendantes et probabilités en contexte.