

OBJECTIFS

- Lire un tableau croisé et un arbre pondéré.
- Calculer une probabilité conditionnelle.
- Distinguer $P(A \cap B)$, $P_A(B)$ et $P_B(A)$.
- Utiliser la formule des probabilités totales.
- Reconnaître ou justifier l'indépendance de deux événements.
- Interpréter les résultats dans un contexte.

ACTIVITE DE DEPART

Un site étudie 1 000 commandes :

	retard R	$\bar{R}$	total
express E	45	255	300
$\bar{E}$	35	665	700
total	80	920	1 000

1. Quelle proportion des commandes est express et en retard ?
2. Parmi les commandes express, quelle proportion est en retard ?
3. Parmi les commandes en retard, quelle proportion est express ?

1. Intersection et probabilité conditionnelle

Définition (Intersection) L'événement $A \cap B$ signifie : « A et B sont réalisés simultanément ». Sa probabilité est notée

$$P(A \cap B).$$

Définition (Probabilité conditionnelle) Si $P(A) > 0$, la probabilité de B sachant que A est réalisé est

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Le nouvel univers est alors l'événement A .

Propriété (Formule du produit) Pour $P(A) > 0$,

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B).$$

De même, si $P(B) > 0$,

$$P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A).$$

Exemple Dans l'activité :

$$P(E \cap R) = \frac{45}{1\,000} = 0,045.$$

Parmi les commandes express :

$$P_E(R) = \frac{45}{300} = 0,15.$$

Parmi les commandes en retard :

$$P_R(E) = \frac{45}{80} = 0,5625.$$

Notation	Question
$P(E \cap R)$	express et retard
$P_E(R)$	retard parmi express
$P_R(E)$	express parmi retard

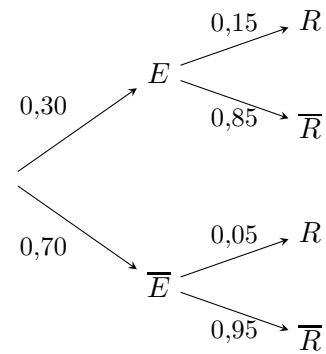
Vigilance. Le mot « parmi » indique souvent un conditionnement. Les trois probabilités ci-dessus ont des dénominateurs différents.

⇒ TD S25 – Parties A et B : tableaux, intersections et conditionnements.

2. Lire et compléter un arbre pondéré

Propriété (Règles d'un arbre pondéré)

- À chaque nœud, la somme des probabilités des branches issues de ce nœud vaut 1.
- La probabilité d'un chemin est le produit des probabilités rencontrées.
- Un chemin conduisant à A puis B représente $A \cap B$.



Exemple On reprend les commandes :

$$P(E) = 0,30, \quad P_E(R) = 0,15.$$

Alors

$$P(E \cap R) = 0,30 \times 0,15 = 0,045.$$

De plus,

$$P_E(\bar{R}) = 1 - 0,15 = 0,85.$$

Propriété (Changer l'ordre de l'arbre) On peut commencer par E ou par R . Les branches conditionnelles changent, mais les probabilités des intersections restent les mêmes.

Vigilance. La deuxième branche d'un chemin porte une probabilité conditionnelle, pas une probabilité simple.

Méthode Pour compléter un arbre :

1. identifier les événements du premier niveau ;
2. compléter les événements contraires ;
3. utiliser les sommes égales à 1 ;
4. multiplier le long d'un chemin ;
5. additionner des chemins seulement s'ils réalisent le même événement final.

⇒ TD S25 – Partie C : arbres pondérés et probabilités de chemins.

3. Formule des probabilités totales

Définition (Partition en deux événements) Les événements A et $\bar{A}$ forment une partition de l'univers : ils sont incompatibles et leur réunion est l'univers.

Propriété (Probabilités totales) Pour tout événement B ,

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B).$$

À l'aide d'un arbre :

$$P(B) = P(A)P_A(B) + P(\bar{A})P_{\bar{A}}(B).$$

Exemple Dans l'activité, un retard peut provenir d'une commande express ou non express :

$$P(R) = P(E \cap R) + P(\bar{E} \cap R).$$

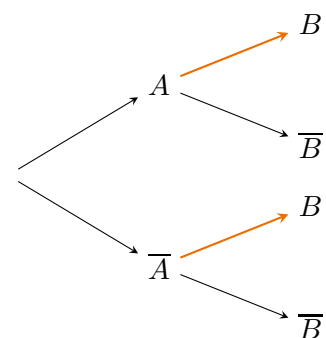
Donc

$$P(R) = 0,30 \times 0,15 + 0,70 \times 0,05 = 0,08.$$

On retrouve les 80 commandes en retard sur 1 000.

Méthode Pour calculer une probabilité finale :

1. repérer tous les chemins conduisant à l'événement ;
2. calculer la probabilité de chaque chemin ;
3. additionner ces probabilités.



Les deux chemins orange réalisent B . Ils sont incompatibles, donc leurs probabilités s'additionnent.

Vigilance. Ne pas additionner toutes les branches de l'arbre : on additionne les probabilités de chemins complets.

4. Indépendance de deux événements

Définition (Événements indépendants) Deux événements A et B sont indépendants lorsque la réalisation de l'un ne modifie pas la probabilité de l'autre. Si $P(A) > 0$, cela s'écrit

$$P_A(B) = P(B).$$

Propriété (Critère par l'intersection) Les événements A et B sont indépendants si et seulement si

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$

Exemple Supposons

$$P(A) = 0,40, \quad P(B) = 0,25, \quad P(A \cap B) = 0,10.$$

Or

$$P(A)P(B) = 0,40 \times 0,25 = 0,10.$$

Les événements A et B sont donc indépendants.

Méthode Pour tester l'indépendance :

1. calculer $P(A \cap B)$;
2. calculer séparément $P(A)P(B)$;
3. comparer les deux résultats ;
4. conclure par une phrase.

Exemple Dans l'activité :

$$P_E(R) = 0,15 \quad \text{et} \quad P(R) = 0,08.$$

Ces probabilités sont différentes. Le type de livraison et le retard ne sont pas indépendants.

Propriété (Symétrie) Si A et B sont indépendants, alors

$$P_A(B) = P(B) \quad \text{et} \quad P_B(A) = P(A)$$

lorsque les probabilités conditionnelles sont définies.

Vigilance. Indépendants ne signifie pas incompatibles. Deux événements incompatibles de probabilités non nulles ne sont pas indépendants.

A RETENIR

- $P(A \cap B)$ concerne la réalisation simultanée de A et B .
- $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ est la probabilité de B parmi les cas où A est réalisé.
- Sur un arbre, on multiplie le long d'un chemin.
- La formule des probabilités totales additionne tous les chemins menant au même événement.
- A et B sont indépendants lorsque $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

APPLICATIONS IMMÉDIATES

1. Calculer $P(A \cap B)$ si $P(A) = 0,4$ et $P_A(B) = 0,3$.
2. Calculer $P_A(B)$ si $P(A) = 0,5$ et $P(A \cap B) = 0,2$.
3. Compléter $P_A(\overline{B})$ si $P_A(B) = 0,65$.
4. Écrire la formule des probabilités totales pour B .
5. Tester l'indépendance si $P(A) = 0,2$, $P(B) = 0,5$ et $P(A \cap B) = 0,1$.
6. Expliquer la différence entre indépendant et incompatible.