

OBJECTIFS

- Reconnaître quand un ajustement affine est pertinent.
- Déterminer une droite d'ajustement au jugé ou par Mayer.
- Utiliser un ajustement par moindres carrés fourni par un outil.
- Interpoler ou extrapoler avec une droite.
- Critiquer la qualité et le domaine d'une prévision.

ACTIVITE DE DEPART

Une enseigne relève, pour six campagnes, le budget publicitaire x , en milliers d'euros, et les ventes y , en milliers d'unités :

x	2	4	6	8	10	12
y	15	20	24	31	35	42

Le nuage présente une tendance presque rectiligne. On souhaite estimer les ventes pour un budget de 9 puis de 15 milliers d'euros.

1. Modéliser un nuage par une droite

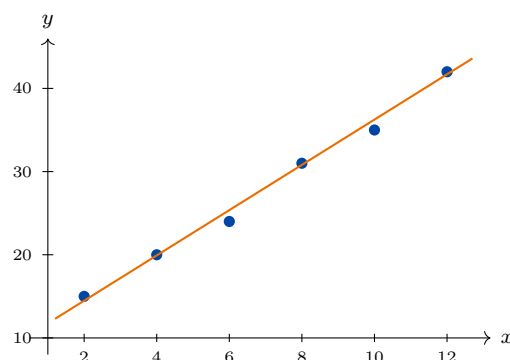
Définition (Ajustement affine) Un **ajustement affine** consiste à approcher un nuage de points par une droite d'équation

$$y = ax + b.$$

Cette droite résume une tendance globale entre les deux variables.

Propriété (Sens des coefficients) Dans $y = ax + b$:

- a est la pente : lorsque x augmente d'une unité, la valeur estimée de y varie d'environ a unités ;
- b est la valeur estimée de y lorsque $x = 0$, si cette interprétation a un sens dans le contexte.



Définition (Ajustement au jugé)

Une droite d'ajustement **au jugé** est tracée visuellement au milieu du nuage, avec des points répartis de part et d'autre.

Méthode Un ajustement affine paraît pertinent lorsque :

- le nuage est globalement allongé autour d'une droite ;
- il n'est pas fortement courbé ;
- les points atypiques sont repérés ;
- le domaine étudié reste cohérent avec les données.

Vigilance. Deux droites au jugé peuvent être différentes. Il faut choisir deux points lisibles sur la droite tracée, puis calculer son équation.

Exemple Une droite plausible passe par $A(2; 15)$ et $B(12; 42)$. Sa pente vaut

$$a = \frac{42 - 15}{12 - 2} = 2,7.$$

Avec $15 = 2,7 \times 2 + b$, on obtient $b = 9,6$. Un modèle possible est donc

$$y = 2,7x + 9,6.$$

⇒ TD S23–S24 – Partie A : pertinence d'un ajustement et droite au jugé.

2. Méthode de Mayer

Définition (Principe de Mayer) Pour une série comportant un nombre pair de points :

1. classer les points par abscisses croissantes ;
2. partager la série en deux groupes de même effectif ;
3. calculer les points moyens G_1 et G_2 des deux groupes ;
4. prendre la droite (G_1G_2) comme droite d'ajustement.

Exemple Pour les trois premiers points :

$$G_1 \left(4; \frac{15 + 20 + 24}{3} \right) = G_1(4; 19,67).$$

Pour les trois derniers :

$$G_2 \left(10; \frac{31 + 35 + 42}{3} \right) = G_2(10; 36).$$

La pente de (G_1G_2) est

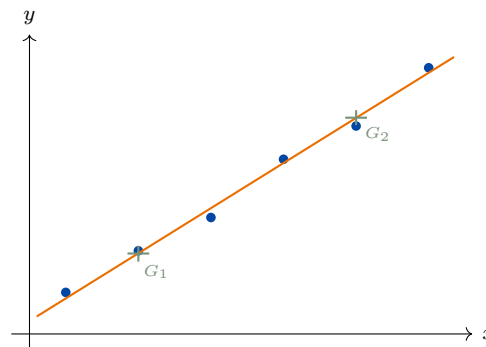
$$a = \frac{36 - 19,67}{10 - 4} \approx 2,72.$$

Puis

$$19,67 \approx 2,72 \times 4 + b,$$

d'où $b \approx 8,79$. La droite de Mayer a donc pour équation approchée

$$y = 2,72x + 8,79.$$



Propriété (Point moyen global)

Lorsque les deux groupes ont le même effectif, le point moyen global G est le milieu de $[G_1G_2]$. La droite de Mayer passe donc par G .

Vigilance. Les abscisses doivent être classées avant de former les groupes.

⇒ TD S23–S24 – Partie B : calculs de Mayer et contrôle par le point moyen.

3. Ajustement par moindres carrés

Définition (Droite des moindres carrés) La calculatrice, le tableur ou un logiciel peut fournir une droite

$$y = ax + b$$

qui rend globalement les écarts verticaux entre les points et la droite aussi petits que possible. Aucune démonstration de cette méthode n'est attendue.

Méthode Avec un outil numérique.

1. saisir les abscisses dans une liste ou une colonne ;
2. saisir les ordonnées dans une seconde liste ;
3. afficher le nuage ;
4. demander une régression linéaire ou une courbe de tendance affine ;
5. relever a et b avec une précision adaptée.

Exemple Pour les données de l'activité, un outil donne :

$$a \approx 2,67, \quad b \approx 9,13.$$

La droite des moindres carrés est donc

$$y \approx 2,67x + 9,13.$$

Propriété (Contrôles)

- la droite doit suivre la tendance du nuage ;
- le signe de a doit être cohérent avec la tendance ;
- la droite des moindres carrés passe par le point moyen G ;
- les arrondis ne doivent pas être trop précoces.

Méthode	Caractéristique
Au jugé	rapide, dépend du tracé
Mayer	calculable à la main
Moindres carrés	fournie par un outil

Vigilance. Une droite très précise numériquement n'est pas forcément pertinente si le nuage n'est pas approximativement rectiligne.

⇒ TD S23–S24 – Partie B : ajustements numériques et comparaison des méthodes.

4. Interpoler, extrapoler et critiquer

Définition (Interpolation) On effectue une **interpolation** lorsque la valeur de x étudiée est située à l'intérieur de l'intervalle des abscisses observées.

Définition (Extrapolation) On effectue une **extrapolation** lorsque la valeur de x étudiée est située en dehors de l'intervalle des abscisses observées.

Méthode Avec le modèle $y = ax + b$:

- pour estimer y , remplacer x dans la formule ;
- pour estimer x , résoudre l'équation $ax + b = y$;
- arrondir en fonction du contexte ;
- préciser interpolation ou extrapolation.

Exemple Avec $y = 2,67x + 9,13$:

$$y(9) \approx 33,2.$$

Comme $9 \in [2 ; 12]$, il s'agit d'une interpolation.

Pour $x = 15$,

$$y(15) \approx 49,2.$$

Comme $15 > 12$, il s'agit d'une extrapolation.

Méthode Avant d'accepter une prévision :

1. observer la forme du nuage ;
2. repérer les valeurs atypiques ;
3. mesurer l'éloignement par rapport au domaine observé ;
4. vérifier que le contexte n'a pas changé ;
5. éviter une précision excessive.

Propriété (Esprit critique) Une interpolation est généralement moins risquée qu'une extrapolation proche. Une extrapolation lointaine peut être très peu fiable, même si le calcul est correct.

Vigilance. Le modèle affine ne doit pas être prolongé indéfiniment. Une vente, une population ou un coût peut être limité par des contraintes réelles.

A RETENIR

- Un ajustement affine est une droite $y = ax + b$ approchant un nuage presque rectiligne.
- L'ajustement peut être obtenu au jugé, par Mayer ou par moindres carrés.
- La méthode de Mayer utilise les points moyens de deux groupes de même effectif.
- Les moindres carrés sont fournis par un outil ; aucune théorie n'est attendue.
- Interpoler signifie prévoir à l'intérieur du domaine observé.
- Extrapoler signifie prévoir à l'extérieur ; la prudence est alors indispensable.

APPLICATIONS IMMEDIATES

1. Une droite passe par $(2 ; 5)$ et $(6 ; 13)$. Calculer sa pente.
2. Pour $y = 3x + 7$, calculer y lorsque $x = 8$.
3. Résoudre $3x + 7 = 40$.
4. Distinguer interpolation et extrapolation.
5. Citer les étapes de Mayer.
6. Donner deux raisons de critiquer une extrapolation.

⇒ TD S23–S24 : ajustements, prévisions et critique des modèles.