

OBJECTIFS

- Choisir entre un modèle discret et un modèle continu.
- Articuler fonctions, suites, dérivation et information chiffrée.
- Passer d'un registre à un autre : texte, tableau, formule, graphique.
- Organiser la résolution d'un problème long.
- Contrôler et interpréter une décision de gestion.

ACTIVITE DE DEPART

Une entreprise suit deux grandeurs :

- le nombre d'abonnés à la fin de chaque trimestre ;
- le bénéfice quotidien en fonction du nombre de centaines d'unités produites.

Le premier modèle est

$$u(0) = 1\,200, \quad u(n+1) = 1,06u(n).$$

Le second est

$$B(x) = -0,5x^2 + 30x - 150 \quad \text{sur } [0; 50].$$

Quelles questions relèvent d'une suite ? Lesquelles relèvent d'une fonction ?

1. Choisir un modèle adapté

Définition (Modèle discret) Un modèle est **discret** lorsque la grandeur est observée à des étapes séparées : mois, trimestres, années, commandes ou générations. On utilise alors une suite $u(n)$, définie pour des rangs entiers.

Définition (Modèle continu) Un modèle est **continu** lorsque la variable peut prendre toutes les valeurs d'un intervalle. On utilise alors une fonction $f(x)$.

Méthode Pour choisir :

- « après n périodes », rang seuil ou cumul $\Rightarrow$ suite ;
- coût, recette ou bénéfice en fonction d'une quantité variable sur un intervalle $\Rightarrow$ fonction ;
- si le contexte impose des valeurs entières, le résultat continu doit être adapté.

Exemple Le nombre d'abonnés est observé chaque trimestre : la suite u est adaptée. Le bénéfice $B(x)$ dépend d'une quantité pouvant être étudiée sur un intervalle : une fonction est adaptée.

Question	Outil
Terme de rang n	formule explicite
Premier seuil	tableur ou boucle
Signe d'une fonction	forme factorisée ou graphique
Maximum ou minimum	dérivée et variations
Comparaison de modèles	tableau ou graphique commun

Vigilance. Le modèle ne décide pas à la place du gestionnaire : son domaine, ses unités et ses limites doivent être explicités.

$\Rightarrow$ TD S21 – Parties A et B : reconnaître le modèle et choisir l'outil.

2. Changer de registre

Propriété (Quatre registres complémentaires) Une même situation peut être décrite par :

- une phrase donnant le sens des grandeurs ;
- un tableau de valeurs ;
- une expression algébrique ou une récurrence ;
- une représentation graphique.

Chaque registre apporte une information différente.



Méthode Du contexte vers la formule.

1. nommer la variable et son unité ;
2. préciser son domaine ;
3. identifier la valeur initiale ;
4. traduire une variation absolue, relative ou une relation fonctionnelle.

Exemple Une hausse trimestrielle de 6 % à partir de 1 200 abonnés donne

$$u(n) = 1\,200 \times 1,06^n.$$

Méthode De la formule vers le graphique.

- pour une suite : placer des points isolés $(n; u(n))$;
- pour une fonction : tracer une courbe sur un intervalle ;
- choisir des échelles compatibles ;
- utiliser le graphique pour lire, conjecturer ou contrôler.

Vigilance. Un graphique fournit souvent des valeurs approchées. Une formule permet parfois de confirmer exactement.

⇒ TD S21 – Parties B et C : tableaux, graphiques, formules et interprétations.

3. Organiser un problème long

Méthode Une démarche en six étapes.

1. **Comprendre** : repérer les grandeurs, les unités et la question finale.
2. **Définir** : introduire la variable ou la suite et préciser le domaine.
3. **Modéliser** : choisir une formule, une récurrence ou une fonction.
4. **Traiter** : calculer, dériver, résoudre, programmer ou représenter.
5. **Contrôler** : vérifier l'ordre de grandeur, les bornes et la cohérence.
6. **Interpréter** : répondre par une phrase liée à la décision de gestion.

Propriété (Questions intermédiaires)

Dans un problème long, les questions intermédiaires peuvent :

- faire construire le modèle ;
- guider vers un seuil ou un extremum ;
- demander un changement de registre ;
- préparer la conclusion finale.

Il faut néanmoins conserver le fil de la situation.

Méthode Rédiger une conclusion. Une bonne conclusion contient :

- la valeur obtenue ;
- l'unité ;
- la période ou la quantité concernée ;
- la décision ou l'interprétation ;
- une réserve si le modèle est approché.

Vigilance. Une ligne de calcul sans phrase ne suffit pas pour une question d'interprétation.

4. Étude synthétique d'une entreprise

Exemple Évolution des abonnés.

$$u(n) = 1\,200 \times 1,06^n.$$

On cherche le premier rang où $u(n) > 1\,500$. Un tableau donne

$$u(3) \approx 1\,429, \quad u(4) \approx 1\,515.$$

Le seuil est donc franchi au rang 4, soit après quatre trimestres.

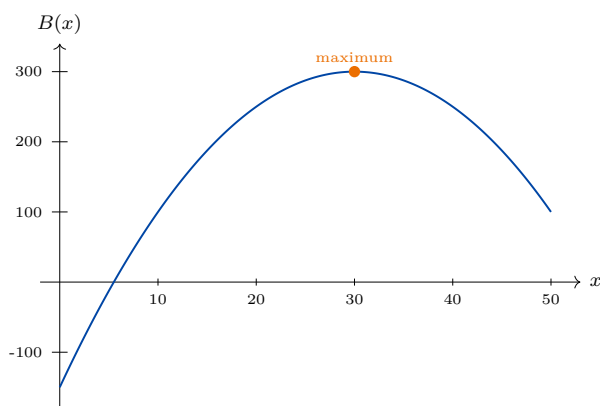
Exemple Optimisation du bénéfice.

$$B(x) = -0,5x^2 + 30x - 150.$$

On a $B'(x) = -x + 30$. La fonction B croît sur $[0; 30]$, puis décroît sur $[30; 50]$. Son maximum est

$$B(30) = 300.$$

Le bénéfice maximal est de 300 milliers d'euros pour 3 000 unités.



Propriété (Décision globale) Les deux résultats répondent à des questions différentes :

- la suite prévoit une échéance ;
- la fonction optimise une quantité.

Une décision complète peut utiliser les deux modèles, mais sans mélanger leurs variables.

Vigilance. Un résultat mathématique doit être confronté aux contraintes réelles : capacité, personnel, budget ou valeurs entières.

Méthode Contrôler avant de conclure.

- Le résultat appartient-il au domaine du modèle ?
- L'ordre de grandeur est-il cohérent avec les données ?
- Un seuil est-il bien le premier rang recherché ?
- Un extremum a-t-il été comparé aux valeurs aux bornes ?
- Les unités du calcul et de la conclusion sont-elles compatibles ?

ERREURS FREQUENTES Mélanger le rang n et le terme $u(n)$; relier les points d'une suite sans justification ; oublier le domaine d'une fonction ; donner un maximum local sans vérifier les bornes ; conclure sans unité ni phrase de gestion.

A RETENIR

- Une suite modélise une évolution par étapes ; une fonction modélise une variation sur un intervalle.
- Un problème long demande de définir les grandeurs, choisir le modèle, calculer, contrôler et interpréter.
- Les registres texte, tableau, formule et graphique doivent être articulés.
- Un seuil répond à une question d'échéance ; un extremum répond à une question d'optimisation.
- Les unités, le domaine et les limites du modèle font partie de la réponse.

APPLICATIONS IMMEDIATES

1. Choisir suite ou fonction pour une fréquentation mensuelle.
2. Choisir suite ou fonction pour un bénéfice selon une quantité.
3. Donner l'outil adapté à un rang seuil.
4. Donner l'outil adapté à un maximum.
5. Citer les quatre registres d'un modèle.
6. Expliquer pourquoi les bornes sont importantes.
7. Rédiger une conclusion avec valeur, unité et décision.

⇒ TD S21 : automatismes, changements de registre et problèmes longs de gestion.