

OBJECTIFS

- Relier le signe de f' aux variations de f .
- Construire un tableau de variations.
- Déterminer un minimum ou un maximum.
- Optimiser une grandeur dans un contexte de gestion.
- Contrôler les valeurs aux bornes d'un intervalle.

ACTIVITE DE DEPART

Le coût de production, en centaines d'euros, de x dizaines d'articles est

$$C(x) = 0,02x^2 - 2x + 130$$

pour $x \in [0; 100]$.

1. Calculer $C'(x)$.
2. Étudier le signe de $C'(x)$.
3. Pour quelle production le coût est-il minimal ?

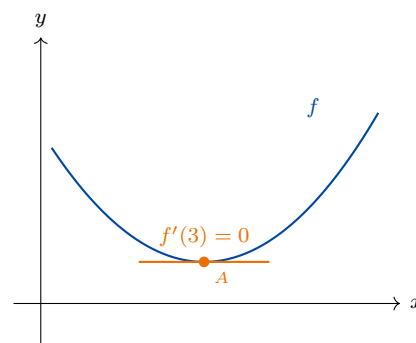
1. Signe de la dérivée et variations**Propriété (Lien entre dérivée et variations)**

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

- Si $f'(x) \geq 0$ sur I , alors f est croissante sur I .
- Si $f'(x) \leq 0$ sur I , alors f est décroissante sur I .
- Si $f'(x) = 0$ sur I , alors f est constante sur I .

Méthode Pour étudier les variations de f :

1. calculer $f'(x)$;
2. résoudre $f'(x) = 0$;
3. étudier le signe de $f'(x)$;
4. traduire ce signe en variations de f ;
5. calculer les valeurs utiles de f .



Lorsque $f'(x) < 0$, les tangentes descendent et la fonction décroît. Lorsque $f'(x) > 0$, les tangentes montent et la fonction croît.

Vigilance. Le signe de $f'(x)$ donne les variations de f , et non le signe de $f(x)$.

Exemple Pour $C(x) = 0,02x^2 - 2x + 130$,

$$C'(x) = 0,04x - 2.$$

Ainsi $C'(x) = 0$ pour $x = 50$. De plus,

$$C'(x) < 0 \text{ si } x < 50, \quad C'(x) > 0 \text{ si } x > 50.$$

Le coût décroît jusqu'à 50, puis croît après 50.

⇒ TD S19–S20 – Partie A : dérivées, signes et lecture des variations.

2. Construire un tableau de variations

Propriété (Lecture d'un tableau) Dans un tableau de variations :

- une flèche montante signifie que la fonction est croissante ;
- une flèche descendante signifie qu'elle est décroissante ;
- les valeurs aux changements de sens correspondent à des extremums locaux ;
- les bornes de l'intervalle doivent apparaître.

x	0	50	100
$C'(x)$	–	0	+
$C(x)$	130	80	130

Méthode Pour construire le tableau :

1. placer les bornes de l'intervalle ;
2. placer les zéros de f' situés dans l'intervalle ;
3. compléter la ligne du signe de f' ;
4. tracer les flèches de variation ;
5. calculer les valeurs de f aux bornes et aux points critiques.

Vigilance. Une racine de f' située hors de l'intervalle étudié n'apparaît pas dans le tableau.

⇒ TD S19–S20 – Partie B : tableaux de signes et tableaux de variations.

Exemple Dans l'activité :

$$C(0) = 130, \quad C(50) = 80, \quad C(100) = 130.$$

Le minimum de C sur $[0; 100]$ est donc 80, atteint pour $x = 50$.

Interprétation. Le coût minimal est de 8000 euros pour une production de 500 articles.

3. Extremums sur un intervalle

Définition (Minimum et maximum) Soit f définie sur un intervalle I .

- f admet un **minimum** m sur I si $f(x) \geq m$ pour tout $x \in I$.
 - f admet un **maximum** M sur I si $f(x) \leq M$ pour tout $x \in I$.
- Le minimum et le maximum sont appelés **extremums**.

Propriété (Changement de signe de la dérivée) Si f' change :

- de négatif à positif en a , alors f admet un minimum local en a ;
- de positif à négatif en a , alors f admet un maximum local en a .

Exemple Si f' est positif avant 4 puis négatif après 4, alors f croît puis décroît : $f(4)$ est un maximum local.

Méthode Pour déterminer un extremum sur un intervalle fermé :

1. étudier les variations ;
2. calculer les valeurs aux points critiques ;
3. calculer aussi les valeurs aux bornes ;
4. comparer toutes les valeurs obtenues.

Vigilance. Un extremum local n'est pas forcément l'extremum sur tout l'intervalle. Les valeurs aux bornes peuvent être plus grandes ou plus petites.

Exemple La recette, en milliers d'euros, est

$$R(x) = -0,1x^2 + 8x$$

pour $x \in [0; 80]$. Alors

$$R'(x) = -0,2x + 8.$$

La dérivée est positive avant 40 et négative après 40. La recette est donc maximale pour $x = 40$, et

$$R(40) = 160.$$

La recette maximale est de 160 000 euros.

⇒ TD S19–S20 – Partie C : extremums, bornes et erreurs à corriger.

4. Étudier un polynôme de degré 3

Méthode Pour un polynôme de degré 3, la dérivée est un polynôme de degré au plus 2. Dans les situations proposées, on cherche une factorisation simple de f' , puis on utilise un tableau de signes.

Exemple Soit

$$B(x) = -x^3 + 9x^2 - 24x + 30$$

sur $[0; 6]$. On a

$$B'(x) = -3x^2 + 18x - 24 = -3(x-2)(x-4).$$

Le signe de B' est négatif sur $[0; 2]$, positif sur $]2; 4[$, puis négatif sur $]4; 6]$.

x	0	2	4	6			
$B'(x)$		−	0	+	0	−	
$B(x)$	30		10		14		−6

Sur $[0; 6]$, le maximum est 30, atteint à la borne $x = 0$. Le maximum local $B(4) = 14$ n'est donc pas le maximum sur l'intervalle.

Vigilance. On ne résout pas une équation du second degré par le discriminant : les dérivées sont choisies sous forme factorisée ou factorisable simplement.

Méthode Optimisation en contexte.

1. définir la grandeur à optimiser ;
2. préciser son domaine ;
3. étudier les variations ;
4. déterminer l'extremum pertinent ;
5. conclure avec les unités et la décision associée.

Exemple Optimisation complète. Le bénéfice, en milliers d'euros, est

$$P(x) = -x^2 + 48x - 320$$

pour $x \in [0; 40]$, où x est un nombre de centaines d'articles. On a

$$P'(x) = -2x + 48.$$

La dérivée est positive sur $[0; 24[$, nulle en 24, puis négative sur $]24; 40]$. La fonction P croît puis décroît : elle atteint donc son maximum en $x = 24$.

$$P(24) = -24^2 + 48 \times 24 - 320 = 256.$$

Le bénéfice maximal est de 256 000 euros, obtenu pour une production de 2 400 articles.

A RETENIR

- Le signe de f' donne le sens de variation de f .
- Les zéros de f' sont des points critiques à étudier.
- Un changement de signe de $-$ vers $+$ donne un minimum local.
- Un changement de signe de $+$ vers $-$ donne un maximum local.
- Sur un intervalle fermé, il faut comparer les valeurs aux points critiques et aux bornes.
- Une optimisation se termine par une interprétation dans le contexte.

APPLICATIONS IMMEDIATES

1. Si $f' > 0$ sur $[1; 5]$, donner le sens de variation de f .
2. Si f' passe de $-$ à $+$ en 3, quel extremum obtient-on ?
3. Étudier le signe de $2x - 6$.
4. Pour $f(x) = x^2 - 6x + 12$, construire le tableau de variations.
5. Pourquoi faut-il calculer $f(a)$ aux bornes ?
6. Interpréter une recette maximale de 125 milliers d'euros.

⇒ TD S19–S20 : variations, extremums et problèmes d'optimisation.