

OBJECTIFS

- Comprendre la fonction dérivée.
- Connaître les dérivées de x , x^2 et x^3 .
- Utiliser la dérivée d'une somme et de kf .
- Dériver un polynôme de degré au plus 3.
- Déterminer l'équation réduite d'une tangente.
- Interpréter $f'(a)$ dans un contexte.

ACTIVITE DE DEPART

Une entreprise modélise son coût total, en milliers d'euros, par

$$C(x) = 0,02x^3 - 0,6x^2 + 12x + 40,$$

où x désigne une quantité en centaines d'articles.

1. Le nombre dérivé $C'(x)$ dépend-il de x ?
2. Comment calculer rapidement $C'(5)$ sans reprendre des sécantes ?
3. Comment obtenir l'équation de la tangente en $x = 5$?

1. De nombres dérivés à une fonction dérivée

Définition (Fonction dérivée) Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I . La fonction qui, à chaque réel $x \in I$, associe le nombre dérivé $f'(x)$ s'appelle la **fonction dérivée** de f , notée f' .

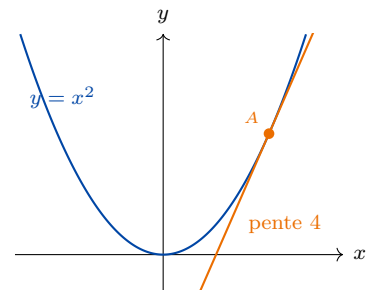
Exemple Si $f(x) = x^2$, le nombre dérivé dépend du point choisi :

$$f'(1) = 2, \quad f'(3) = 6, \quad f'(-2) = -4.$$

La fonction dérivée est donc $f'(x) = 2x$.

Méthode Pour distinguer les notations :

- $f(a)$ est l'ordonnée du point de la courbe ;
- $f'(a)$ est la pente de la tangente en ce point ;
- f' est une fonction définie sur un intervalle.



Au point d'abscisse 2, la tangente a pour pente 4. Ainsi,

$$f'(2) = 4.$$

Vigilance. Les fonctions f et f' ne représentent pas la même grandeur.

⇒ TD S18 – Partie A : notations, images et nombres dérivés.

2. Dérivées de référence

Propriété (Dérivées usuelles du programme)Sur $\mathbb{R}$:

Fonction f	Fonction dérivée f'
$f(x) = c$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$
$f(x) = x^3$	$f'(x) = 3x^2$

où c est un nombre réel constant.

Méthode Pour utiliser le tableau, reconnaître d'abord la forme du terme, puis remplacer chaque terme par sa dérivée.

Exemple Pour $f(x) = x^3$,

$$f'(x) = 3x^2.$$

Ainsi $f'(2) = 3 \times 2^2 = 12$. La tangente à la courbe au point d'abscisse 2 a pour pente 12.

Propriété (Justification intuitive pour x^2) Pour $f(x) = x^2$, le taux de variation entre x et $x + h$ est

$$\frac{(x+h)^2 - x^2}{h}.$$

Pour $h \neq 0$,

$$\frac{2xh + h^2}{h} = 2x + h.$$

Quand h devient très proche de 0, cette expression se rapproche de $2x$. On obtient donc

$$f'(x) = 2x.$$

Propriété (Justification intuitive pour x^3) De même,

$$\frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = 3x^2 + 3xh + h^2,$$

qui se rapproche de $3x^2$ lorsque h se rapproche de 0.

Vigilance. On ne donne pas ici de définition formelle de limite.

⇒ TD S18 – Partie B : dérivées de référence et calculs directs.

3. Linéarité et polynômes de degré au plus 3

Propriété (Dérivée d'une somme et de kf) Si f et g sont dérivables sur un intervalle et si $k \in \mathbb{R}$, alors

$$(f + g)' = f' + g' \quad \text{et} \quad (kf)' = kf'.$$

Méthode Pour dériver un polynôme de degré au plus 3 :

1. écrire le polynôme comme une somme de termes ;
2. dériver chaque terme ;
3. conserver son coefficient ;
4. réduire l'expression obtenue.

Exemple Soit

$$P(x) = 4x^3 - 3x^2 + 7x - 5.$$

Alors

$$P'(x) = 4 \times 3x^2 - 3 \times 2x + 7,$$

soit

$$P'(x) = 12x^2 - 6x + 7.$$

Propriété (Formule générale) Pour

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

où $a, b, c, d \in \mathbb{R}$,

$$P'(x) = 3ax^2 + 2bx + c.$$

La constante d disparaît à la dérivation.

Exemple Pour le coût de l'activité,

$$C'(x) = 0,06x^2 - 1,2x + 12.$$

Ainsi

$$C'(5) = 0,06 \times 25 - 1,2 \times 5 + 12 = 7,5.$$

Au voisinage de 500 articles, le coût augmente d'environ 7,5 milliers d'euros par centaine d'articles supplémentaire.

Vigilance. Les règles du produit et du quotient ne sont pas au programme de cette notion. On dérive uniquement des sommes de termes de degré au plus 3.

Méthode Contrôler un calcul.

- la dérivée d'un polynôme de degré 3 est de degré au plus 2;
- la dérivée d'une constante est nulle;
- un coefficient multiplicatif est conservé;
- on peut vérifier une valeur de $f'(a)$ avec une pente graphique.

⇒ TD S18 – Parties B et C : dériver, contrôler et factoriser.

4. Équation réduite d'une tangente

Propriété (Équation de la tangente) Soit f dérivable en a . La tangente à la courbe de f au point d'abscisse a a pour équation

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Méthode Pour déterminer l'équation réduite de la tangente en a :

1. calculer $f(a)$;
2. déterminer $f'(x)$;
3. calculer $f'(a)$;
4. remplacer dans

$$y = f(a) + f'(a)(x - a);$$

5. développer pour obtenir $y = mx + p$.

Exemple Pour $f(x) = x^3 - 2x + 1$, on cherche la tangente en $a = 1$.

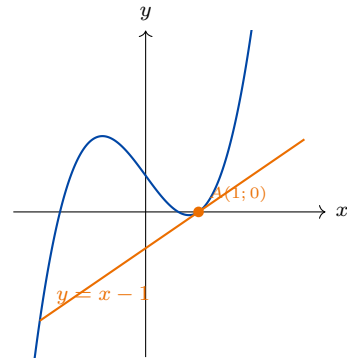
$$f(1) = 0, \quad f'(x) = 3x^2 - 2, \quad f'(1) = 1.$$

Ainsi,

$$y = 0 + 1(x - 1),$$

donc l'équation réduite est

$$y = x - 1.$$



Contrôles. L'équation obtenue doit :

- avoir pour coefficient directeur $f'(a)$;
- être vérifiée par le point $(a; f(a))$.

Vigilance. Ne pas confondre $f'(a)$, la pente, et $f(a)$, l'ordonnée du point de contact.

A RETENIR

- La fonction dérivée f' associe à x le nombre dérivé $f'(x)$.
- $(x)' = 1$, $(x^2)' = 2x$, $(x^3)' = 3x^2$ et la dérivée d'une constante est nulle.
- On dérive une somme terme à terme et $(kf)' = kf'$.
- Si $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, alors $P'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.
- La tangente en a a pour équation $y = f(a) + f'(a)(x - a)$.

APPLICATIONS IMMÉDIATES

1. Dériver $f(x) = 5x^2 - 3x + 7$.
2. Dériver $g(x) = -2x^3 + 4x^2 - 1$.
3. Calculer $g'(2)$.
4. Quelle est la dérivée de la fonction constante $h(x) = 18$?
5. Pour $p(x) = x^2 + 3x - 2$, déterminer la tangente en $a = 1$.
6. Vérifier que cette tangente passe par $(1; p(1))$.
7. Expliquer pourquoi la dérivée d'un polynôme cubique est quadratique.

⇒ TD S18 : calculs de dérivées, tangentes et problèmes de coût marginal.