

OBJECTIFS

- Calculer et interpréter un taux de variation.
- Relier un taux de variation à la pente d'une sécante.
- Comprendre la tangente comme position limite de sécantes.
- Lire ou estimer un nombre dérivé graphiquement.
- Interpréter un nombre dérivé comme variation instantanée.

ACTIVITE DE DEPART

Le coût total, en euros, de x articles est modélisé par

$$C(x) = 0,05x^2 + 20x + 500.$$

On s'intéresse à la production de 100 articles.

1. Calculer l'augmentation moyenne du coût par article entre 100 et 120 articles.
2. Recommencer entre 100 et 101 articles.
3. Quel coût supplémentaire peut-on prévoir localement pour un article de plus ?

1. Taux de variation et pente d'une sécante

Définition (Taux de variation) Soit une fonction f , deux nombres réels distincts a et b . Le **taux de variation** de f entre a et b est

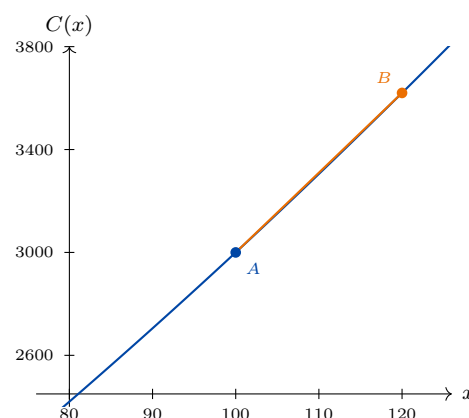
$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Il mesure la variation moyenne de $f(x)$ lorsque x passe de a à b .

Propriété (Interprétation graphique) Si $A(a; f(a))$ et $B(b; f(b))$ sont deux points de la courbe de f , le taux de variation entre a et b est le coefficient directeur de la droite (AB) , appelée **sécante** à la courbe.

Méthode Pour calculer un taux de variation :

1. calculer la variation verticale $f(b) - f(a)$;
2. calculer la variation horizontale $b - a$;
3. former le quotient et préciser son unité.



Exemple Ici $C(100) = 3\,000$ et $C(120) = 3\,620$. Le taux de variation vaut

$$\frac{3\,620 - 3\,000}{120 - 100} = 31.$$

Entre 100 et 120 articles, le coût augmente en moyenne de 31 euros par article.

Vigilance. Le numérateur et le dénominateur doivent correspondre au même ordre : $f(b) - f(a)$ avec $b - a$.

⇒ TD S17 – Partie A : taux de variation, pentes et unités.

2. Des sécantes à la tangente

On fixe $A(a; f(a))$ et on choisit un point voisin $M_h(a + h; f(a + h))$. Le coefficient directeur de la sécante (AM_h) est

$$\frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

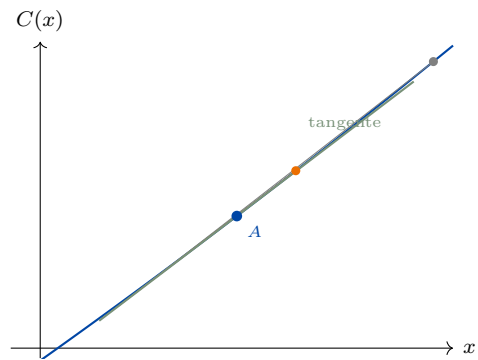
Lorsque h devient de plus en plus proche de 0, le point M_h se rapproche de A . Les sécantes semblent se rapprocher d'une droite unique : la **tangente** à la courbe en A .

Définition (Nombre dérivé) Lorsque les coefficients directeurs des sécantes se rapprochent d'un nombre unique, ce nombre est appelé **nombre dérivé de f en a** et se note

$$f'(a).$$

Graphiquement, $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse a .

Vigilance. La notion de limite est utilisée ici de manière intuitive : aucune définition formelle n'est attendue.



Exemple Pour C , on note

$$\tau_h = \frac{C(100 + h) - C(100)}{h}.$$

On obtient :

h	20	10	5	1	0,5
τ_h	31	30,5	30,25	30,05	30,025

Les valeurs se rapprochent de 30. On conjecture donc $C'(100) = 30$.

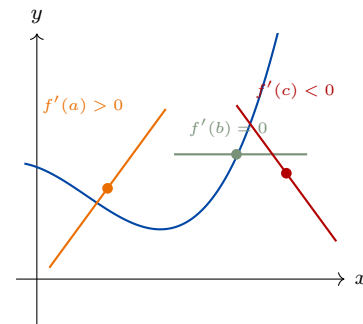
⇒ TD S17 – Partie B : sécantes rapprochées et estimation d'un nombre dérivé.

3. Lire et interpréter un nombre dérivé

Méthode Lire $f'(a)$ sur un graphique.

- repérer le point $A(a; f(a))$;
- repérer la tangente en A ;
- choisir deux points lisibles sur cette tangente;
- calculer son coefficient directeur :

$$\frac{\text{variation verticale}}{\text{variation horizontale}}.$$



Propriété (Signe du nombre dérivé)

- tangente montante : $f'(a) > 0$;
- tangente horizontale : $f'(a) = 0$;
- tangente descendante : $f'(a) < 0$.

Vigilance. On lit la pente de la **tangente**, pas la hauteur du point de contact. Les nombres $f(a)$ et $f'(a)$ n'ont généralement ni la même valeur ni la même unité.

Propriété (Interprétation locale) Le nombre dérivé $f'(a)$ mesure la variation instantanée de f au voisinage de a . Pour une petite augmentation de x , la variation de $f(x)$ est approximativement donnée par la pente de la tangente.

Exemple Si $d(t)$ est une distance en kilomètres et t un temps en heures, alors $d'(2) = 65$ signifie qu'à l'instant 2 h, la vitesse est de 65 km/h.

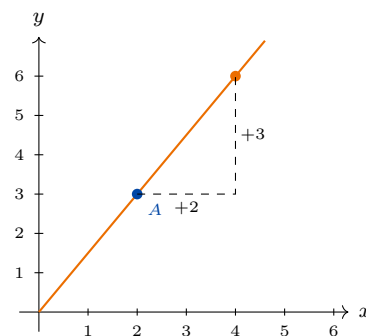
Exemple Si $C(x)$ est un coût en euros, alors $C'(100) = 30$ signifie qu'au voisinage de 100 articles, un article supplémentaire augmente le coût d'environ 30 euros. C'est une interprétation marginale.

4. Construire une tangente à partir de sa pente

Méthode On connaît le point de contact $A(a; f(a))$ et le nombre dérivé $f'(a) = m$.

1. Placer le point A .
2. Choisir un déplacement horizontal simple.
3. Utiliser la pente m pour déterminer le déplacement vertical correspondant.
4. Placer un second point, puis tracer la droite passant par les deux points.

Exemple Si $A(2; 3)$ et $f'(2) = \frac{3}{2}$, on peut avancer de 2 unités horizontalement et monter de 3 unités verticalement. La tangente passe alors par A et par le point $(4; 6)$.



Vigilance. La tangente décrit la direction locale de la courbe. Elle peut couper la courbe plus loin : elle n'est pas forcément située d'un seul côté.

ERREURS FREQUENTES

- inverser seulement le dénominateur dans un taux de variation ;
- lire la pente de la courbe au lieu de celle de la tangente ;
- confondre $f(a)$, hauteur du point, et $f'(a)$, pente locale ;
- oublier l'unité dans une vitesse ou un coût marginal.

A RETENIR

- Le taux de variation entre a et b est $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.
- Il est égal à la pente de la sécante passant par les points d'abscisses a et b .
- La tangente en a est la position limite des sécantes lorsque le second point se rapproche du premier.
- Le nombre dérivé $f'(a)$ est la pente de cette tangente.
- $f'(a)$ s'interprète comme une variation instantanée ou marginale, avec une unité adaptée.

APPLICATIONS IMMEDIATES

1. Calculer le taux de variation entre 2 et 5 si $f(2) = 7$ et $f(5) = 19$.
2. Une tangente monte de 6 unités quand x augmente de 3. Donner le nombre dérivé.
3. Quel est le signe du nombre dérivé lorsque la tangente descend ?
4. Interpréter $C'(80) = 24$ si C est un coût en euros.
5. Interpréter $d'(3) = 72$ si d est une distance en kilomètres et t en heures.
6. Expliquer pourquoi $f(a)$ et $f'(a)$ sont différents.

⇒ TD S17 : calculer, lire et interpréter sécantes, tangentes et nombres dérivés.