

OBJECTIFS

- Reconnaître une évolution absolue constante.
- Reconnaître une évolution relative constante.
- Passer d'une relation de récurrence à une formule explicite.
- Calculer directement un terme de rang donné.
- Déterminer le sens de variation à partir de la raison.
- Comparer un modèle arithmétique et un modèle géométrique.

ACTIVITE DE DEPART

Deux magasins suivent leur nombre de clients mensuels. Au départ, chacun compte 500 clients.

- Magasin A : il gagne 40 clients par mois.
 - Magasin B : il gagne 8 % de clients par mois.
1. Calculer les effectifs après un, deux puis trois mois.
 2. Quelle quantité reste constante dans chaque modèle ?
 3. Les deux évolutions ont-elles la même allure ?

1. Deux modèles d'évolution discrète

Définition (Suite arithmétique) Une suite u est **arithmétique** lorsqu'on passe d'un terme au suivant en ajoutant toujours le même nombre r , appelé **raison** :

$$u(n+1) = u(n) + r.$$

Elle modélise une **évolution absolue constante**.

Exemple Pour le magasin A,

$$u(0) = 500, \quad u(n+1) = u(n) + 40.$$

La raison est $r = 40$. Chaque mois, l'effectif augmente de 40 clients.

Méthode Pour reconnaître une suite arithmétique à partir d'un tableau, on calcule les différences

$$u(n+1) - u(n).$$

Si elles sont toutes égales, la suite est arithmétique.

Vigilance. Une suite n'est pas forcément arithmétique ou géométrique. Quelques termes seulement peuvent suggérer un modèle, mais il faut vérifier que la règle est valable pour tous les rangs étudiés.

Définition (Suite géométrique) Une suite v à termes strictement positifs est **géométrique** lorsqu'on passe d'un terme au suivant en multipliant toujours par le même nombre $q > 0$, appelé **raison** :

$$v(n+1) = qv(n).$$

Elle modélise une **évolution relative constante**.

Exemple Pour le magasin B, une hausse de 8 % correspond au coefficient multiplicateur 1,08 :

$$v(0) = 500, \quad v(n+1) = 1,08v(n).$$

La raison est $q = 1,08$.

Méthode Pour reconnaître une suite géométrique positive à partir d'un tableau, on calcule les quotients

$$\frac{v(n+1)}{v(n)}.$$

S'ils sont tous égaux, la suite est géométrique.

Modèle	Quantité constante	Exemple
Arithmétique	différence $u(n+1) - u(n) = r$	+40 clients
Géométrique	quotient $\frac{v(n+1)}{v(n)} = q$	$\times 1,08$

⇒ TD S13–S14 – Partie A : reconnaître la nature d'une suite et déterminer sa raison.

2. Formules explicites

Propriété (Terme général d'une suite arithmétique) Si u est arithmétique de raison r , alors, pour tout entier $n \geq 0$,

$$u(n) = u(0) + nr.$$

Plus généralement, pour deux rangs p et n ,

$$u(n) = u(p) + (n - p)r.$$

Exemple Pour $u(0) = 500$ et $r = 40$,

$$u(n) = 500 + 40n.$$

Ainsi,

$$u(12) = 500 + 40 \times 12 = 980.$$

Méthode Pour passer de la récurrence à la formule explicite :

1. repérer le terme initial ;
2. repérer la raison ;
3. utiliser $u(n) = u(0) + nr$.

Vigilance. Dans une formule géométrique, l'exposant est lié au nombre de passages d'un rang à l'autre. Si le terme initial est $v(3)$, alors

$$v(n) = v(3) \times q^{n-3}.$$

⇒ TD S13–S14 – Partie B : formules explicites et calcul de termes.

3. Sens de variation

Propriété (Suite arithmétique) Une suite arithmétique de raison r est :

- strictement croissante si $r > 0$;
- constante si $r = 0$;
- strictement décroissante si $r < 0$.

Exemple La suite définie par

$$u(n) = 740 - 25n$$

est arithmétique de raison -25 . Elle est donc strictement décroissante.

Méthode Pour déterminer le sens de variation :

1. identifier la nature de la suite ;
2. déterminer sa raison ;
3. appliquer la propriété correspondante ;
4. interpréter la variation dans le contexte.

Vigilance. Pour une suite géométrique, la règle ci-dessus est utilisée ici pour des termes strictement positifs et une raison positive, conformément au cadre du programme.

⇒ TD S13–S14 – Parties B et C : variations et choix de modèle.

Propriété (Terme général d'une suite géométrique) Si v est géométrique de raison $q > 0$, alors, pour tout entier $n \geq 0$,

$$v(n) = v(0) \times q^n.$$

Plus généralement,

$$v(n) = v(p) \times q^{n-p}.$$

Exemple Pour $v(0) = 500$ et $q = 1,08$,

$$v(n) = 500 \times 1,08^n.$$

Ainsi,

$$v(12) = 500 \times 1,08^{12} \approx 1\,259.$$

Méthode Pour traduire un taux t en raison :

$$q = 1 + t.$$

Une hausse de 8% donne $q = 1,08$, une baisse de 12% donne $q = 0,88$.

Propriété (Suite géométrique positive) Une suite géométrique à termes strictement positifs, de raison $q > 0$, est :

- strictement croissante si $q > 1$;
- constante si $q = 1$;
- strictement décroissante si $0 < q < 1$.

Exemple La suite définie par

$$v(n) = 900 \times 0,85^n$$

est géométrique positive de raison 0,85. Elle est donc strictement décroissante.

4. Comparer les deux modèles

Propriété (Allures des nuages de points) Une suite arithmétique est un modèle discret linéaire : ses points sont alignés. Une suite géométrique est un modèle discret exponentiel : ses points ne sont généralement pas alignés.

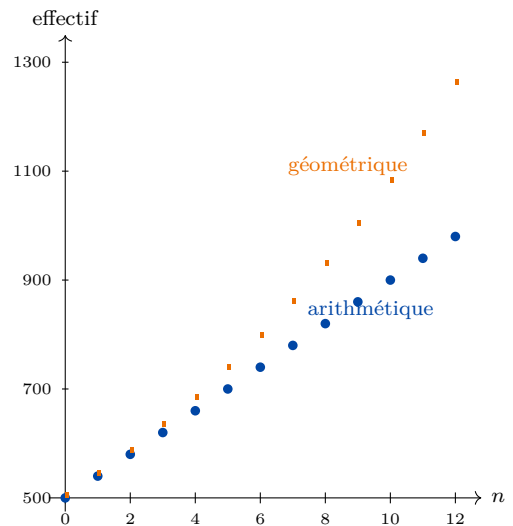
Exemple Pour les deux magasins :

$$u(n) = 500 + 40n, \quad v(n) = 500 \times 1,08^n.$$

Les deux suites partent de 500, mais la hausse absolue de u reste 40, tandis que la hausse absolue de v augmente avec l'effectif.

Méthode Pour choisir un modèle :

- variation absolue constante $\Rightarrow$ modèle arithmétique ;
- taux d'évolution constant $\Rightarrow$ modèle géométrique ;
- aucune de ces régularités $\Rightarrow$ autre modèle.



Les graphiques servent à comparer les modèles sur les rangs représentés. Ils ne suffisent pas, à eux seuls, à prouver la nature d'une suite.

A RETENIR

- Suite arithmétique : $u(n+1) = u(n) + r$ et $u(n) = u(0) + nr$.
- Suite géométrique positive : $v(n+1) = qv(n)$ et $v(n) = v(0)q^n$.
- On reconnaît une suite arithmétique par des différences constantes.
- On reconnaît une suite géométrique positive par des quotients constants.
- Le signe de r , ou la position de q par rapport à 1, donne le sens de variation.
- Une évolution absolue constante est arithmétique ; une évolution relative constante est géométrique.

APPLICATIONS IMMEDIATES

1. Pour $u(0) = 120$ et $u(n+1) = u(n) + 15$, calculer $u(5)$.
2. Donner la formule explicite de u .
3. Pour $v(0) = 300$ et $v(n+1) = 1,04v(n)$, calculer $v(6)$.
4. Une baisse annuelle de 7 % correspond à quelle raison ?
5. Déterminer le sens de variation de $900 \times 0,92^n$.
6. La liste 5, 9, 14, 20 est-elle arithmétique ou géométrique ?

$\Rightarrow$ TD S13–S14 : reconnaître, calculer et comparer les deux modèles.