

OBJECTIFS

- Vérifier qu'un nombre est une racine.
- Lire les racines sur une forme factorisée.
- Factoriser dans un cas simple lorsqu'une racine est connue.
- Étudier le signe d'un produit de facteurs du premier degré.
- Interpréter racines et signe dans un problème.

ACTIVITE DE DEPART

Une entreprise note x le nombre de centaines d'articles vendus. Son bénéfice, en milliers d'euros, est modélisé sur $[0; 10]$ par $B(x) = -0,5(x-2)(x-8)$.

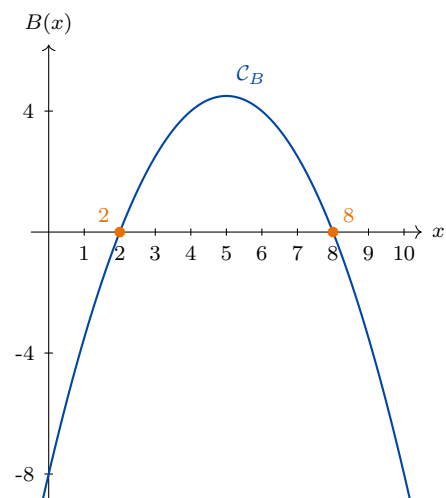
1. Calculer $B(2)$, $B(5)$ et $B(8)$.
2. Pour quelles ventes le bénéfice semble-t-il positif ?
3. Que représentent les nombres 2 et 8 ?

1. Racines et forme factorisée

Définition (Racine d'un polynôme) Soit P un polynôme. Un nombre réel α est une **racine** de P lorsque $P(\alpha) = 0$. Graphiquement, les racines sont les abscisses des points où la courbe coupe ou touche l'axe des abscisses.

Propriété (Racines d'une forme factorisée) Soient $a \neq 0$, x_1 et x_2 trois nombres réels. Pour $P(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$, les racines sont x_1 et x_2 , car un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul.

Méthode Pour vérifier qu'un nombre α est une racine, on remplace x par α dans l'expression de $P(x)$. Si le résultat est 0, alors α est bien une racine.



Exemple Pour $Q(x) = 3(x+4)(x-1)$, les racines sont -4 et 1 .

Interprétation. Dans l'activité, $B(2) = B(8) = 0$: l'entreprise est à l'équilibre pour 200 et 800 articles.

Méthode Factoriser lorsqu'une racine est connue. Si $P(x) = ax^2 + bx + c$ et si α est une racine connue, on cherche une écriture $P(x) = (x - \alpha)(ax + d)$. On développe puis on détermine d en comparant les coefficients. Cette méthode est réservée aux cas simples.

Exemple On considère $P(x) = 2x^2 - 10x + 12$. Comme $P(2) = 8 - 20 + 12 = 0$, 2 est une racine. On cherche $P(x) = (x - 2)(2x + d)$. En développant, $(x - 2)(2x + d) = 2x^2 + (d - 4)x - 2d$. L'égalité $-2d = 12$ donne $d = -6$. Ainsi $P(x) = (x - 2)(2x - 6) = 2(x - 2)(x - 3)$.

Vigilance. Une valeur lue sur un graphique est d'abord une conjecture : on la vérifie par le calcul lorsque l'expression est disponible. La recherche systématique de toutes les racines n'est pas attendue.

⇒ TD S10 – Partie B : racines et factorisations simples.

2. Signe d'une forme factorisée

Propriété (Signe entre deux racines) Soient $x_1 < x_2$ et $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$, avec $a \neq 0$. Si $a > 0$, P est positif à l'extérieur des racines et négatif entre elles. Si $a < 0$, les signes sont inversés. Dans tous les cas, $P(x_1) = P(x_2) = 0$.

En notant $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$, pour $a > 0$:

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
$P(x)$	+	0	-	0	+

Le signe se retrouve en multipliant le signe de a , celui de $x - x_1$ et celui de $x - x_2$.

Exemple Étudions le signe de $F(x) = -2(x + 1)(x - 4)$. Les racines sont -1 et 4 .

x	$-\infty$	-1	4	$+\infty$	
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$	
$x-4$	$-$	$-$	0	$+$	
$F(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Ainsi $F(x) \geq 0$ pour $x \in [-1; 4]$.

⇒ TD S10 – Parties B et C : tableaux de signes, choix de méthode et erreurs à corriger.

3. Résoudre et interpréter un problème

Méthode Dans un problème, on commence par préciser l'intervalle des valeurs possibles. On traduit ensuite la question : *équilibre* signifie souvent $P(x) = 0$, *gain* $P(x) > 0$, *perte* $P(x) < 0$. On résout grâce aux racines et au signe, puis on intersecte avec l'intervalle du contexte et on rédige une conclusion avec les unités.

Exemple Dans l'activité de départ, $x \in [0; 10]$ et $B(x) = -0,5(x - 2)(x - 8)$. Le coefficient est négatif : B est positif entre les deux racines. Ainsi $B(x) > 0$ pour $x \in]2; 8[$. L'entreprise réalise donc un bénéfice lorsqu'elle vend strictement entre 200 et 800 articles.

Vigilance. Une solution algébrique peut être impossible dans le contexte : quantité négative, date hors période ou valeur non entière.

Méthode Si la factorisation n'est pas immédiate : **balayage**. On calcule les valeurs de la fonction pour des nombres régulièrement espacés. Un changement de signe entre deux valeurs consécutives permet d'encadrer une solution. On réduit ensuite le pas pour améliorer la précision.

Vigilance. Le balayage donne une valeur approchée, pas une valeur exacte.

A RETENIR

- α est une racine de P si et seulement si $P(\alpha) = 0$.
- Dans $a(x - x_1)(x - x_2)$, les racines sont x_1 et x_2 .
- Pour $x_1 < x_2$, le signe est celui de a à l'extérieur des racines et son opposé entre elles.
- Dans un problème, on tient compte de l'intervalle admissible et on interprète le résultat.
- Lorsqu'aucune factorisation simple n'apparaît, un balayage ou un solveur peut fournir une approximation.

APPLICATIONS IMMÉDIATES

1. Donner les racines de $3(x - 5)(x + 2)$.
2. Vérifier que 4 est une racine de $x^2 - 7x + 12$.
3. Résoudre $(2x + 1)(x - 6) = 0$.
4. Étudier le signe de $-3(x - 1)(x - 7)$.
5. Résoudre $2(x + 3)(x - 2) \leq 0$.
6. Expliquer pourquoi une racine négative peut être rejetée dans un problème de quantité.

⇒ TD S10 – S'entraîner, choisir une méthode et interpréter.