

OBJECTIFS

- Reconnaître la courbe d'une fonction du second degré.
- Identifier son orientation, son axe et son sommet.
- Lire et construire un tableau de variations.
- Associer une courbe à une forme simple.
- Exploiter la symétrie d'une parabole.
- Interpréter un maximum ou un minimum dans un contexte.

ACTIVITÉ DE DÉPART – PRIX ET BÉNÉFICE

Le bénéfice mensuel, en milliers d'euros, est modélisé par

$$B(x) = -2(x - 5)^2 + 18,$$

où x est le prix de vente, en dizaines d'euros.

x	2	3	4	5	6	7	8
$B(x)$	0	10	16	18	16	10	0

1. Repérer les valeurs égales placées à égale distance de 5.
2. Pour quel prix le bénéfice est-il maximal ?
3. Décrire l'évolution du bénéfice avant puis après ce prix.
4. Quelle forme semble avoir la courbe correspondante ?

1. Fonctions polynômes du second degré

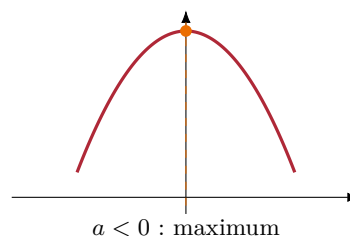
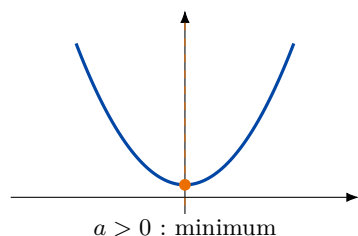
Définition (Fonction du second degré) Une fonction polynôme du second degré est une fonction qui peut s'écrire

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

où a, b, c sont des réels et $a \neq 0$.

Propriété (Représentation graphique) La courbe représentative d'une fonction du second degré est une **parabole**. Elle possède :

- un axe de symétrie vertical ;
- un sommet situé sur cet axe ;
- un minimum si elle est tournée vers le haut ;
- un maximum si elle est tournée vers le bas.



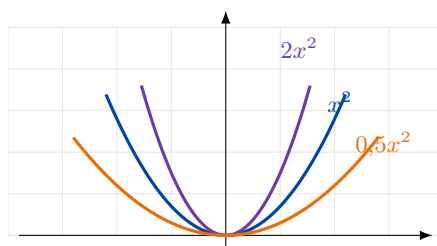
Vigilance. Le signe de a indique l'orientation. Il ne donne pas, à lui seul, la position du sommet.

2. La fonction $x \mapsto ax^2$

Propriété (Caractéristiques) Pour $f(x) = ax^2$:

- l'axe de symétrie est la droite $x = 0$;
- le sommet est $S(0;0)$;
- si $a > 0$, f décroît puis croît ;
- si $a < 0$, f croît puis décroît.

Plus $|a|$ est grand, plus la parabole est resserrée.



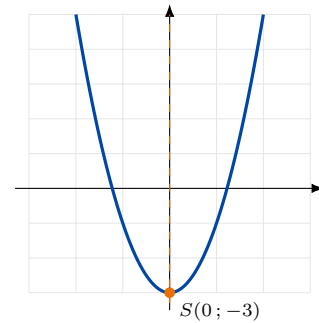
3. Translation verticale : $ax^2 + c$

Propriété (Effet du nombre c) La courbe de $f(x) = ax^2 + c$ est obtenue en déplaçant verticalement celle de $x \mapsto ax^2$.

- l'axe reste $x = 0$;
- le sommet devient $S(0; c)$;
- l'orientation dépend toujours du signe de a .

Exemple Pour $f(x) = 2x^2 - 3$:

- $a = 2 > 0$: la parabole est tournée vers le haut ;
- l'axe est $x = 0$;
- le sommet est $S(0; -3)$;
- le minimum de f est -3 .



4. Une forme qui fait apparaître le sommet

Propriété (Forme simple $a(x - h)^2 + k$) Lorsque

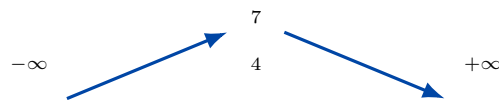
$$f(x) = a(x - h)^2 + k,$$

on lit directement :

- l'axe de symétrie $x = h$;
- le sommet $S(h; k)$;
- l'orientation grâce au signe de a .

Méthode Cette lecture est utilisée lorsque la forme est déjà donnée ou obtenue par une identité remarquable simple. Aucune formule générale du sommet n'est exigée.

Exemple Pour $g(x) = -3(x - 4)^2 + 7$, l'axe est $x = 4$, le sommet est $S(4; 7)$ et la fonction admet un maximum égal à 7.



Vigilance. Dans $(x - h)^2$, l'axe est $x = h$. Ainsi, $(x + 2)^2 = (x - (-2))^2$ a pour axe $x = -2$.

5. Exploiter la symétrie

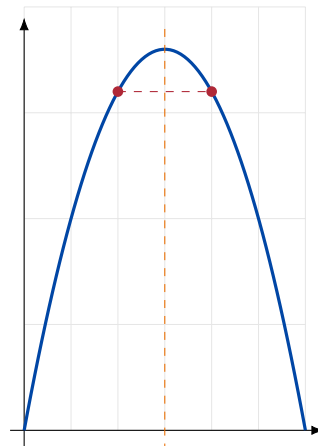
Propriété (Images symétriques) Si l'axe de symétrie est $x = h$, alors deux nombres placés à la même distance de h ont la même image :

$$f(h - d) = f(h + d).$$

Exemple Dans l'activité, l'axe est $x = 5$. On observe :

$$\begin{aligned} B(4) &= B(6) = 16, & B(3) &= B(7) = 10, \\ B(2) &= B(8) = 0. \end{aligned}$$

La symétrie permet donc de compléter rapidement un tableau de valeurs.



6. Une forme factorisée simple

Propriété (Axe d'une forme $a(x - x_1)(x - x_2)$)

Pour

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2),$$

la parabole coupe l'axe des abscisses aux abscisses x_1 et x_2 . Son axe de symétrie est à mi-distance :

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Le sommet s'obtient en calculant l'image de cette abscisse.

Exemple Pour $f(x) = -2(x - 2)(x - 8)$, l'axe est

$$x = \frac{2 + 8}{2} = 5.$$

Puis

$$f(5) = -2(5 - 2)(5 - 8) = 18.$$

Le sommet est $S(5; 18)$. Comme $a = -2 < 0$, il s'agit d'un maximum.

Vigilance. L'étude systématique des racines et du signe d'une forme factorisée sera menée en N07. Ici, la forme sert surtout à reconnaître une courbe et son axe.

7. Retrouver des caractéristiques d'une expression développée

Pour $f(x) = ax^2 + bx + c$, on peut déterminer ou conjecturer les éléments caractéristiques à partir :

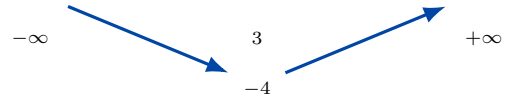
- d'un graphique ou d'un tableau de valeurs ;

- de valeurs égales révélant une symétrie ;
- d'une réécriture simple de l'expression ;
- d'une forme factorisée donnée.

Exemple Pour $f(x) = x^2 - 6x + 5$, on reconnaît

$$x^2 - 6x + 5 = (x - 3)^2 - 4.$$

L'axe est $x = 3$, le sommet est $S(3; -4)$, et f admet un minimum égal à -4 .



Méthode Pour associer une expression à une courbe :

1. observer l'orientation pour déterminer le signe de a ;
2. repérer l'axe et le sommet ;
3. utiliser les éventuelles intersections avec les axes ;
4. vérifier avec une valeur simple, par exemple $f(0) = c$.

8. Interpréter un extremum

Dans une situation de gestion, le sommet peut représenter :

- un bénéfice ou une recette maximale ;
- un coût minimal ;
- une valeur optimale d'un prix, d'une quantité ou d'un budget.

Dans l'activité, le sommet est $S(5; 18)$. Le bénéfice maximal est donc de 18 milliers d'euros, obtenu pour un prix $x = 5$, soit 50 euros.

⇒ TD N06, parties C et D : exercices 19 à 30

À RETENIR

- La courbe de $ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$, est une parabole.
- $a > 0$: minimum ; $a < 0$: maximum.
- Pour $a(x - h)^2 + k$, l'axe est $x = h$ et le sommet est $S(h; k)$.
- Pour $a(x - x_1)(x - x_2)$, l'axe est $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$.
- Deux abscisses symétriques par rapport à l'axe ont la même image.
- Aucune formule générale du sommet ni aucun discriminant n'est utilisé.

APPLICATIONS IMMÉDIATES

1. Donner l'orientation de $f(x) = -4x^2 + 3$.
2. Donner le sommet de $g(x) = 2(x - 5)^2 - 1$.
3. Déterminer l'axe de $h(x) = 3(x - 2)(x - 8)$.
4. Compléter $f(4) = f(\dots)$ si l'axe est $x = 6$.
5. Décrire les variations de $-2(x + 1)^2 + 5$.
6. Interpréter le sommet d'une courbe de bénéfice.