

OBJECTIFS

- Calculer un taux de variation entre deux valeurs.
- Interpréter ce taux et son unité.
- Relier ce taux à la pente d'une sécante.
- Reconnaître une fonction croissante ou décroissante.
- Utiliser le signe des taux de variation.
- Comparer des évolutions sur plusieurs intervalles.

ACTIVITÉ DE DÉPART – COÛT LOGISTIQUE

Le coût journalier $C(x)$, en euros, dépend du nombre x de commandes préparées.

x	100	200	350	500
$C(x)$	700	1 000	1 600	2 350

1. Calculer l'augmentation du coût entre 100 et 200 commandes.
2. Ramener cette augmentation à une commande supplémentaire.
3. Refaire le calcul entre 200 et 350, puis entre 350 et 500.
4. Le coût augmente-t-il toujours au même rythme ?

1. Mesurer une variation moyenne

Définition (Taux de variation) Soit une fonction f , et deux nombres distincts a et b appartenant à son ensemble de définition. Le taux de variation de f entre a et b est

$$\tau_{a,b} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Il mesure la variation moyenne de $f(x)$ lorsque x augmente d'une unité entre a et b .

Méthode Pour calculer un taux de variation :

1. identifier a , b , $f(a)$ et $f(b)$;
2. calculer la variation de sortie $f(b) - f(a)$;
3. calculer la variation d'entrée $b - a$;
4. effectuer le quotient et préciser l'unité.

Exemple Entre 100 et 200 commandes :

$$\tau_{100,200} = \frac{1\,000 - 700}{200 - 100} = 3.$$

Le coût augmente en moyenne de 3 euros par commande supplémentaire sur cet intervalle.

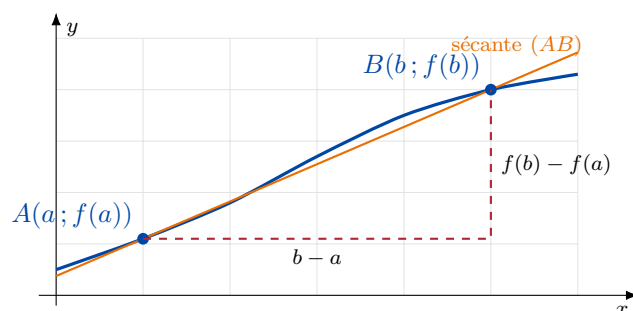
Vigilance. Ce taux n'est pas un pourcentage. Son unité est ici « euro par commande ». Un taux de variation compare deux variations, tandis qu'un taux d'évolution compare une variation à une valeur initiale.

⇒ TD N05, partie A : exercices 1 à 8

2. Interprétation graphique : pente d'une sécante

Propriété (Pente de la sécante) Soient $A(a; f(a))$ et $B(b; f(b))$ deux points distincts de la courbe $\mathcal{C}_f$. Le taux de variation de f entre a et b est la pente de la droite (AB) , appelée **sécante** à la courbe :

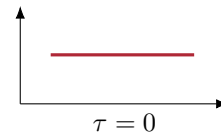
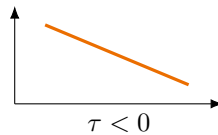
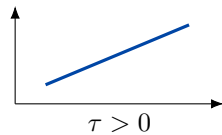
$$\tau_{a,b} = \frac{\text{variation verticale}}{\text{variation horizontale}} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$



3. Signe du taux de variation

Propriété (Lire le sens de variation) Pour $a < b$:

- si $f(b) > f(a)$, alors $\tau_{a,b} > 0$: la sécante monte ;
- si $f(b) < f(a)$, alors $\tau_{a,b} < 0$: la sécante descend ;
- si $f(b) = f(a)$, alors $\tau_{a,b} = 0$: la sécante est horizontale.



4. Fonctions monotones sur un intervalle

Définition (Fonction croissante) Une fonction f est croissante sur un intervalle I lorsque, pour tous $a, b \in I$,

$$a < b \implies f(a) \leq f(b).$$

Autrement dit, les images sont rangées dans le même ordre que les nombres.

Définition (Fonction décroissante) Une fonction f est décroissante sur un intervalle I lorsque, pour tous $a, b \in I$,

$$a < b \implies f(a) \geq f(b).$$

Les images sont alors rangées dans l'ordre inverse.

x	a	b
$f(x)$	$f(a)$	$f(b)$

$f(a) \longrightarrow f(b)$

x	a	b
$g(x)$	$g(a)$	$g(b)$

$g(a) \longrightarrow g(b)$

Fonction croissante : $f(a) \leq f(b)$.

Fonction décroissante : $g(a) \geq g(b)$.

Vigilance. « Positive » et « croissante » ne signifient pas la même chose. Une fonction peut être positive tout en étant décroissante.

5. Lien entre monotonie et taux de variation

Propriété (Signe des taux et monotonie) Sur un intervalle I :

- f est croissante si et seulement si, pour tous $a < b$ dans I , $\tau_{a,b} \geq 0$;
- f est décroissante si et seulement si, pour tous $a < b$ dans I , $\tau_{a,b} \leq 0$.

Méthode Pour utiliser un taux de variation :

- un taux calculé sur un seul intervalle renseigne seulement sur cet intervalle ;
- pour caractériser une fonction monotone, le signe doit être valable pour **tous** les couples $a < b$ de l'intervalle ;
- un graphique ou un tableau de variations peut permettre de conclure sans calculer tous les taux.

Exemple Le coût logistique de l'activité augmente sur chaque intervalle du tableau. Les taux valent successivement

3, 4, 5.

Ils sont positifs : le coût est croissant sur les données observées. Comme ils ne sont pas égaux, le coût n'augmente pas à rythme constant.

⇒ TD N05, parties B et C : exercices 9 à 25

6. Cas particulier : une fonction affine

Propriété (Taux constant) Pour une fonction affine $f(x) = mx + p$, le taux de variation entre deux nombres distincts a et b vaut toujours m :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = m.$$

Ainsi :

- si $m > 0$, f est croissante ;
- si $m < 0$, f est décroissante ;
- si $m = 0$, f est constante.

Exemple Pour $C(x) = 6x + 90$,

$$\frac{C(b) - C(a)}{b - a} = \frac{(6b + 90) - (6a + 90)}{b - a} = \frac{6(b - a)}{b - a} = 6.$$

Le coût augmente toujours de 6 euros par unité supplémentaire.

7. Comparer des rythmes de variation

Pour une même fonction, les taux peuvent dépendre de l'intervalle. Un indicateur passe de 80 à 110 entre les années 1 et 4, puis de 110 à 122 entre les années 4 et 6 :

$$\tau_{1,4} = \frac{110 - 80}{4 - 1} = 10, \quad \tau_{4,6} = \frac{122 - 110}{6 - 4} = 6.$$

Il augmente sur les deux périodes, mais plus rapidement en moyenne sur la première.

8. Interpréter selon le contexte

Si $d(t)$ est une distance parcourue en fonction du temps, alors

$$\frac{d(b) - d(a)}{b - a}$$

est la vitesse moyenne entre les instants a et b . Par exemple, 180 km parcourus entre 8 h et 11 h donnent $180 \div 3 = 60$ km/h.

Vigilance. Une variation moyenne ne décrit pas nécessairement chaque instant : une vitesse moyenne de 60 km/h ne signifie pas que le véhicule a roulé constamment à 60 km/h.

⇒ TD N05, partie D : exercices 26 à 30

À RETENIR

$$\tau_{a,b} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

- Le taux de variation est la pente de la sécante passant par $(a; f(a))$ et $(b; f(b))$.
- Son signe indique si les valeurs augmentent, diminuent ou restent égales entre a et b .
- Une fonction croissante a tous ses taux de variation positifs ou nuls ; une fonction décroissante les a négatifs ou nuls.
- Pour une fonction affine $mx + p$, le taux est constant et égal à m .
- Toujours préciser l'unité et interpréter le résultat.

APPLICATIONS IMMÉDIATES

1. Calculer le taux de variation de $f(x) = 2x + 5$ entre 1 et 4.
2. Une grandeur passe de 50 à 74 lorsque x passe de 2 à 8. Calculer son taux moyen.
3. Interpréter un taux de -3 euros par client.
4. Donner le signe des taux d'une fonction décroissante.
5. Distinguer taux de variation et taux d'évolution.
6. Expliquer le lien entre taux de variation et sécante.